



TESIS DOCTORAL

Factor de Intensidad de Tensiones en fisuras elípticas con mecanismo de apertura y cierre en ejes giratorios

Autor:

Patricia Rubio Herrero

Directoras:

Lourdes Rubio Ruiz de Aguirre

María Belén Muñoz Abella

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

Leganés, febrero de 2014



TESIS DOCTORAL

Factor de Intensidad de Tensiones en fisuras elípticas con mecanismo de apertura y cierre en ejes giratorios

Autor:

Patricia Rubio Herrero

Directoras:

Lourdes Rubio Ruiz de Aguirre

María Belén Muñoz Abella

Firma del Tribunal Calificador:

Firma

Presidente:

Vocal:

Secretario:

Calificación:

Leganés, de de

A Javi y Adriana, mi pequeña gran familia

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis directoras, las profesoras Lourdes Rubio Ruiz de Aguirre y María Belén Muñoz Abella, toda la ayuda, dedicación y disposición que me han demostrado en todo momento y que ha sido fundamental para la realización de la Tesis.

A la profesora Isabel González Farias, por su colaboración y sus aportaciones en el desarrollo de los modelos analíticos.

A las profesoras Henar Miguélez y Ana Muñoz, que siempre me han animado durante la realización de este trabajo.

A mi compañera Laura por sus sugerencias y su disposición a ayudarme en todo momento.

Al resto de mis compañeros del Departamento, Mauricio, Jose, Jesús, Xavier, Antonio, Patricia y Norberto, por su ayuda y amistad.

Al Ministerio de Ciencia e Innovación por el apoyo para este trabajo a través de los Proyectos DPI2009-13264 y DPI2006-09906.

A mis padres, Rosa y Gregorio, que han sido para mí un ejemplo a lo largo de toda mi vida. Gracias por su cariño y su apoyo incondicional. En especial a mi madre por su gran ayuda en la lectura y corrección del documento.

A mi hermana Marta y a Toys, por su colaboración en la realización de algunas figuras, pero sobre todo por su ánimo, cariño y por haber estado siempre ahí.

A mis amigos, María, Raquel, Silvia, Vero y Carlos, por su gran apoyo y por su amistad.

A Javi, por su comprensión, su paciencia y especialmente por su confianza en mí, porque sin él no habría sido posible llegar hasta aquí.

A mi niña, Adriana, por acompañarme y darme fuerzas en los momentos más duros y difíciles de la realización de esta Tesis.

Abstract

In this PhD Thesis a general expression that gives the Stress Intensity Factor (SIF) along the crack front of an elliptical crack in a rotating shaft in terms of the crack depth ratio, crack aspect ratio, place ratio and the angle of rotation has been developed.

A numerical study using the Finite Element Method (FEM) has been made. To simulate the rotation of the shaft, different angular positions have been considered. The SIF along the crack front of the shaft subjected to rotary bending has been calculated for each angular position of the cracked shaft and for different crack geometries. The numerical model has been used to investigate the partially opening/closing of the crack during the rotation of the shaft. The numerical results have been compared with others obtained from the literature. It has been found that they are in good agreement.

Finally, the crack propagation has been analyzed using a developed algorithm of the Paris Law and the SIF expression proposed.

Resumen

En esta Tesis Doctoral se ha desarrollado un modelo analítico que permite obtener el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) a lo largo del frente de una fisura recta o elíptica contenida en un eje giratorio, en función de las características de la fisura, profundidad y forma, de la posición relativa en el frente y del ángulo de giro del eje.

Para ello, se ha realizado un estudio numérico cuasiestático, mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF), a partir del cuál se han determinado, por un lado, el FIT a lo largo del frente de la fisura sometida a flexión rotatoria, teniendo en cuenta el fenómeno de apertura y cierre; y, por otro lado, el porcentaje de apertura de la fisura durante un giro del eje. El modelo numérico ha sido validado comparando sus resultados con otros recogidos en la literatura.

Por último, se ha analizado la propagación de la fisura contenida en el eje giratorio mediante el desarrollo de un algoritmo que integra la Ley de Paris haciendo uso del modelo desarrollado para el cálculo del FIT.

Índice

1	Introducción	1
1.1.	Motivación	2
1.2.	Objetivos	3
1.3.	Contenido	4
2	Antecedentes	7
2.1.	Conceptos básicos de la Mecánica de la Fractura	8
2.1.1.	Planteamiento local de la fractura	8
2.1.2.	Planteamiento global de la fractura	11
2.1.3.	Simplificación del problema tridimensional	12
2.2.	Comportamiento de ejes fisurados	13
2.2.1.	Ejes rotatorios fisurados	13
2.2.2.	Tipología de fisuras en ejes giratorios	15

2.2.3. Modelos de comportamiento de la fisura en ejes giratorios .	15
2.3. Cálculo del FIT en ejes fisurados	21
2.3.1. Cálculo del FIT en ejes fisurados no rotatorios	21
2.3.2. FIT en ejes fisurados rotatorios	25
2.4. Propagación de fisuras	26
2.4.1. Propagación de fisuras en ejes	30
3 Modelo numérico	35
3.1. Modelo geométrico	36
3.1.1. Planteamiento del problema	36
3.2. Modelo numérico	39
3.2.1. Cargas y condiciones de apoyo	39
3.2.2. Contactos entre superficies	39
3.2.3. Mallado	40
3.2.4. Cálculo del FIT	41
3.3. Análisis de resultados	42
3.4. Obtención del FIT a partir de los desplazamientos	43
3.5. Validación del modelo	47
3.5.1. Fisura completamente abierta	47

<i>Índice</i>	III
3.5.2. Fisura parcialmente abierta	50
3.6. Resultados y discusión	53
3.6.1. Estudio de la apertura y cierre	53
3.6.2. Factor de Intensidad de Tensiones	57
4 Expresión del Factor de Intensidad de Tensiones de un eje giratorio fisurado	65
4.1. Obtención de la expresión del Factor de Intensidad de Tensiones .	66
4.1.1. FIT con fisura completamente abierta	69
4.1.2. FIT con fisura parcialmente cerrada	73
4.1.3. FIT con fisura completamente cerrada	76
4.2. Validación de la expresión del FIT	78
4.2.1. Error relativo medio	82
5 Modelo de propagación	85
5.1. Metodología para la obtención de la geometría del frente	86
5.2. Determinación del avance óptimo en el punto central del frente . .	90
5.3. Resultados	93
5.3.1. Número de ciclos	93
5.3.2. Evolución del frente de fisura	93

6 Conclusiones y trabajos futuros	107
6.1. Resumen final y conclusiones	108
6.2. Trabajos futuros	109
Bibliografía	111
A Coeficientes de los ajustes	121

Índice de Figuras

2.1. Modos básicos de fractura: (a) Modo <i>I</i> o de apertura, (b) Modo <i>II</i> o de cortadura, (c) Modo <i>III</i> o de cizalladura	9
2.2. Definición del sistema de coordenadas en el extremo de la fisura .	10
2.3. Probeta tridimensional fisurada	13
2.4. Modelo de eje de Jeffcott	14
2.5. Fisuras recta y elíptica	15
2.6. Esquema de las situaciones de fisura completamente cerrada y completamente abierta	16
2.7. Función de apertura y cierre del modelo de fisura abierta	17
2.8. Función de apertura y cierre propuesta por Gasch [1]	17
2.9. Función de apertura y cierre propuesta por Mayes y Davies [2] . .	18
2.10. Variación de la posición de la línea de cierre de la fisura (LCF) con la posición angular del eje en el modelo de apertura y cierre, Darpe et al. [3] (la zona cerrada aparece rayada)	19

2.11. Zonas abiertas y cerradas (zona de color rojo) en diferentes posiciones angulares para $\alpha = 0,25$, Bachschmid et al. [4]	20
2.12. Sección transversal de la zona fisurada parcialmente cerrada, Kulesza y Sawicki [5]	20
2.13. Sección transversal de la zona fisurada y parámetros característicos de una fisura elíptica	22
2.14. Caracterización de las fisuras en el modelo de Carpinteri [6]	25
2.15. FIT adimensional a lo largo del frente de fisura para diferentes valores de θ [6]	26
2.16. Tasa de crecimiento de fisura y factor de intensidad de tensiones .	28
2.17. Modelización elíptica del frente de fisura	31
2.18. Restauración del frente de fisura de Carpinteri [7]	31
2.19. Restauración del frente de fisura de Toribio et al. [8]	32
3.1. Esquema del eje fisurado	36
3.2. Variación de la profundidad relativa (α) y del factor de forma (β) de la fisura	37
3.3. Posiciones en el frente de la fisura γ	38
3.4. Posiciones angulares utilizadas en el estudio	38
3.5. Detalle de los contactos en la zona intacta y en la zona fisurada .	40
3.6. Detalle de la malla en la sección fisurada para el caso $\beta = 0.25$. .	41
3.7. Detalle de la malla en la sección fisurada en la dirección longitudinal	42

3.8. FIT adimensional para $\alpha = 0.25$ y $\beta = 0$ para los distintos valores de γ	43
3.9. Detalle de los desplazamientos en la fisura	44
3.10. Diferentes puntos sobre los que se miden los desplazamientos para $\gamma = 0$	45
3.11. Desplazamientos u_z	46
3.12. Comparación del FIT adimensional obtenido mediante el módulo 'crack' y el obtenido mediante desplazamientos para $\beta = 0$, $\alpha = 0.25$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$	47
3.13. Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Shin y Cai [9] para $\beta = 0$ y distintos valores de α	48
3.14. Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Shin y Cai [9] para $\beta = 0,25$ y distintos valores de α	48
3.15. Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Shin y Cai [9] para $\beta = 0,5$ y distintos valores de α	49
3.16. Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Shin y Cai [9] para $\beta = 0,75$ y distintos valores de α	49
3.17. Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Shin y Cai [9] para $\beta = 1$ y distintos valores de α	50
3.18. Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Carpinteri [6] para $\beta = 0$, $\alpha = 0,1$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$	51
3.19. Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Carpinteri [6] para $\beta = 0$, $\alpha = 0,25$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$	51

3.20. Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Carpinteri [6] para $\beta = 0$, $\alpha = 0,5$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$	52
3.21. Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Carpinteri [6] para $\beta = 1$, $\alpha = 0,3$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$	52
3.22. Apertura de la fisura (zona en color) para un eje con una fisura con $\alpha = 0,25$ y $\beta = 0$ en un giro completo	54
3.23. Apertura de la fisura para el modelo LCF [10], Bachschmid et al. [4] y en el modelo desarrollado	54
3.24. Porcentaje de apertura de la fisura respecto del área transversal a lo largo de medio giro para distintos valores de α y $\beta = 0$	55
3.25. Porcentaje de apertura de la fisura respecto del área transversal a lo largo de medio giro para distintos valores de α y $\beta = 0,5$	56
3.26. Porcentaje de apertura de la fisura respecto de la sección transversal total a lo largo de medio giro para todos los casos de β y $\alpha = 0,25$	56
3.27. FIT adimensional a lo largo de un giro del eje para un factor de forma $\beta = 0,5$ y una profundidad $\alpha = 0,1$	57
3.28. FIT adimensional a lo largo de un giro del eje para un factor de forma $\beta = 0,5$ y una profundidad $\alpha = 0,2$	58
3.29. FIT adimensional a lo largo de un giro del eje para un factor de forma $\beta = 0,5$ y una profundidad $\alpha = 0,3$	58
3.30. FIT adimensional a lo largo de un giro del eje para un factor de forma $\beta = 0,5$ y una profundidad $\alpha = 0,4$	59
3.31. FIT adimensional a lo largo de un giro del eje para un factor de forma $\beta = 0,5$ y una profundidad $\alpha = 0,5$	59

3.32. Apertura de la fisura con simetría	60
3.33. Valores nulos del FIT para las posiciones relativas extremas $\gamma = -0,83$ y $\gamma = 0,83$, para un factor de forma $\beta = 0,25$ y una profundidad $\alpha = 0,3$	61
3.34. Apertura y cierre de la fisura para un factor de forma $\beta = 1$ y una profundidad $\alpha = 0,1$	62
3.35. Apertura y cierre de la fisura para un factor de forma $\beta = 0$ y una profundidad $\alpha = 0,5$	63
4.1. FIT adimensional en un giro completo del eje para cada posición angular en el frente de fisura.	67
4.2. Fisura completamente abierta y comportamiento lineal	70
4.3. Fisura parcialmente cerrada y comportamiento no lineal	73
4.4. Fisura completamente cerrada	76
4.5. Esquema del procedimiento utilizado para calcular la expresión cerrada del FIT	77
4.6. Tabla resumen de la expresión del FIT	78
4.7. Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante la expresión cerrada y los resultados numéricos, en función del ángulo de giro θ , para $\alpha = 0.3$ y $\beta = 0$	79
4.8. Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante la expresión cerrada y los resultados numéricos, en función del ángulo de giro θ , para $\alpha = 0.3$ y $\beta = 0.25$	80

4.9. Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante la expresión cerrada y los resultados numéricos, en función del ángulo de giro θ , para $\alpha = 0.3$ y $\beta = 0.5$	80
4.10. Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante la expresión cerrada y los resultados numéricos, en función del ángulo de giro θ , para $\alpha = 0.3$ y $\beta = 0.75$	81
4.11. Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante la expresión cerrada y los resultados numéricos, en función del ángulo de giro θ , para $\alpha = 0.3$ y $\beta = 1$	81
5.1. Evolución del frente de fisura	87
5.2. Valores máximo y mínimo del FIT para un γ genérico	88
5.3. Esquema del procedimiento utilizado para determinar la propagación	89
5.4. Estudio de sensibilidad de $\Delta a(A)$ ($\alpha_o = 0.05$ $\beta_o = 1$)	91
5.5. Estudio de sensibilidad de $\Delta a(A)$ ($\alpha_o = 0.05$ $\beta_o = 0$)	91
5.6. Estudio de sensibilidad de $\Delta a(A)$ ($\alpha_o = 0.2$ $\beta_o = 0$)	92
5.7. Estudio de sensibilidad de $\Delta a(A)$ ($\alpha_o = 0.2$ $\beta_o = 1$)	92
5.8. Número de ciclos para la propagación de una fisura $\alpha_0 = 0,05$ y diferentes β_0	94
5.9. Evolución del frente de fisura para una geometría inicial de $\alpha_o = 0.05$ y $\beta_o = 0$	94
5.10. Evolución del frente de fisura para una geometría inicial de $\alpha_o = 0.05$ y $\beta_o = 0.25$	95

5.11. Evolución del frente de fisura para una geometría inicial de $\alpha_o = 0.05$ y $\beta_o = 0.5$	95
5.12. Evolución del frente de fisura para una geometría inicial de $\alpha_o = 0.05$ y $\beta_o = 0.75$	95
5.13. Evolución del frente de fisura para una geometría inicial de $\alpha_o = 0.05$ y $\beta_o = 1$	96
5.14. Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.05$ y distintos factores de forma iniciales β_o	96
5.15. Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.1$ y distintos factores de forma iniciales β_o	97
5.16. Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.15$ y distintos factores de forma iniciales β_o	97
5.17. Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.2$ y distintos factores de forma iniciales β_o	98
5.18. Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.25$ y distintos factores de forma iniciales β_o	98
5.19. Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.3$ y distintos factores de forma iniciales β_o	99
5.20. Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.35$ y distintos factores de forma iniciales β_o	99

5.21. Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.4$ y distintos factores de forma iniciales β_o	100
5.22. Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.45$ y distintos factores de forma iniciales β_o	100
5.23. Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para un forma inicial $\beta_o = 0.5$ y distintas profundidades iniciales de fisura α_o	101
5.24. Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α de [6], para distintas profundidades iniciales α_o y distintos factores de forma β_o para el caso de flexión rotatoria	102
5.25. FIT máximo en el centro y en los extremos de la fisura para $\alpha = 0.1103$	
5.26. FIT máximo en el centro y en los extremos de la fisura para $\alpha = 0.5103$	
5.27. Evolución experimental de una fisura de frente elíptico en un caso de flexión cíclica [11]	104
5.28. Propagación experimental de una fisura con cambio de forma recta a cóncava [12]	104
5.29. Propagación experimental de una fisura con cambio de forma con- vexa a cóncava [13]	105

Índice de Tablas

3.1. Expresiones obtenidas para cada posición relativa en el frente γ .	46
3.2. Ángulo de apertura de la fisura (rad) para los diferentes casos analizados	62
4.1. Error relativo medio (%)	82
4.2. Diferencias entre el valor numérico del F_I y el valor del F_I estimado mediante el ajuste	83
5.1. Profundidad relativa en la que la fisura se hace recta y empieza a adquirir forma cóncava en función de la geometría inicial de la misma	105
A.1. Coeficientes C_{ijk} en la ecuación 4.23.	122
A.2. Continuación coeficientes C_{ijk} en la ecuación 4.23.	123
A.3. Coeficientes M_{ijk} en la ecuación 4.24.	124
A.4. Continuación coeficientes M_{ijk} en la ecuación 4.24.	125
A.5. Coeficientes N_{ij} en la ecuación 4.26.	125

A.6. Coeficientes P_{ijk} en la ecuación 4.46.	126
A.7. Continuación coeficientes P_{ijk} en la ecuación 4.46.	127

1

Introducción

En este primer capítulo se expone la motivación que ha dado lugar a la realización de esta Tesis Doctoral y se explican los objetivos planteados.

1.1 Motivación

Una gran parte de los fallos en servicio de las máquinas rotatorias de responsabilidad (turbinas, bombas, rotores, compresores, etc.), se producen habitualmente por la presencia y propagación de fisuras de fatiga en sus componentes. Las fisuras limitan la seguridad y el adecuado funcionamiento de estos elementos, puesto que pueden producir su rotura catastrófica y, en definitiva, dar lugar a costosos procesos de mantenimiento o reparación. Los ejes, que son uno de los componentes principales de estas máquinas, trabajan en rotación y están sometidos a esfuerzos de flexión y torsión que producen tensiones variables a lo largo del tiempo, que pueden hacer propagar la fisura como consecuencia de la fatiga. Debido a ese tipo de esfuerzos las fisuras de fatiga de los ejes reales presentan un frente semielíptico, aunque la mayoría de los estudios que se pueden encontrar en la literatura consideran fisuras con frente recto. Por lo tanto, se hace necesario el desarrollo de métodos fiables que permitan, una vez que se ha originado la fisura, conocer sus características de propagación y, a partir de la velocidad de crecimiento de la misma, estimar la vida remanente del eje, con el fin de establecer planes adecuados de mantenimiento.

La presencia de fisuras en un elemento mecánico provoca un aumento de su flexibilidad local, produciéndose cambios en sus comportamientos estático y dinámico, que se traducen en el incremento de los desplazamientos y la disminución de las frecuencias de vibración, entre otros, constituyendo estos cambios un indicador de la presencia de este tipo de defectos.

Un aspecto a tener en cuenta en el comportamiento de ejes fisurados es el estado de apertura/cierre de la fisura contenida en un eje giratorio. Este mecanismo de apertura y cierre se ha modelado de diferentes formas. El modelo más simple consiste en considerar que la fisura se encuentra completamente abierta o completamente cerrada y no se tiene en cuenta la apertura o cierre parcial de la misma. Este modelo se denomina *switching crack* y se ha utilizado con frecuencia por diferentes investigadores debido a su simplicidad. Otro modelo de apertura y cierre es el denominado *breathing crack*, que considera que la fisura se abre y se

cierra de forma gradual, teniendo en cuenta estados de apertura y cierre parciales de la misma.

El Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) es un parámetro que caracteriza el estado tensional en el frente de una fisura. En el caso de un eje giratorio, en el que se produce el mecanismo de apertura/cierre, el valor del FIT varía a lo largo de un giro, pasando de ser positivo cuando la fisura está abierta, y sometida a esfuerzos de tracción, a ser nulo cuando la fisura se cierra.

La fisura se propaga cuando el FIT alcanza un valor crítico, denominado tenacidad de fractura y que depende del material. Una vez que se conoce la variación del FIT en un giro completo del eje en cada punto del frente de la fisura es posible analizar la propagación de la misma.

Por lo tanto, se pone de manifiesto la necesidad de realizar un estudio exhaustivo del Factor de Intensidad de Tensiones en un giro completo del eje en todo el frente de la fisura. Asimismo, es interesante disponer de una expresión simplificada del FIT, para estudiar el comportamiento dinámico de ejes fisurados, que no requiera apoyarse en soluciones muy complejas y que se pueda utilizar para analizar la propagación de fisuras.

Para contribuir en esta dirección, se ha abordado la presente Tesis Doctoral en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Carlos III de Madrid, que pretende avanzar en el conocimiento del comportamiento de ejes giratorios fisurados, con el fin de evitar pérdidas asociadas a roturas catastróficas, y cuyos objetivos y contenido se enumeran a continuación.

1.2 Objetivos

En esta Tesis Doctoral se han planteado tres objetivos de carácter general:

- Estudio pormenorizado del Factor de Intensidad de Tensiones a lo largo del frente de una fisura elíptica contenida en un eje giratorio, teniendo en

cuenta el fenómeno de apertura y cierre. Para ello se ha realizado un estudio numérico cuasiestático del Factor de Intensidad de Tensiones en función de la profundidad y forma de la fisura, de la posición en el frente y del ángulo de giro del eje.

- Desarrollo de un modelo analítico que permita calcular el valor del Factor de Intensidad de Tensiones en un giro completo del eje, en función de las características de la fisura, profundidad y forma, de la posición en el frente y del ángulo girado.
- Análisis de la propagación de fisuras contenidas en ejes giratorios, mediante la integración de la Ley de Paris del modelo analítico desarrollado, considerando el mecanismo de apertura y cierre.

1.3 Contenido

La presente Tesis Doctoral está dividida en seis capítulos, el primero de los cuales corresponde a esta Introducción.

En el segundo capítulo se resumen algunos conceptos fundamentales de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal y se citan los trabajos más relevantes de otros autores en relación con el problema planteado, la dinámica de ejes y la propagación de fisuras.

En el tercer capítulo se describe el modelo numérico de ejes fisurados desarrollado, y se recogen, validan y discuten los resultados obtenidos.

En el cuarto capítulo se obtiene una expresión general, a partir del estudio numérico, que permite calcular el valor del FIT en todo el frente de la fisura en un giro completo del eje, en función de las características de la misma y del ángulo de giro del eje.

En el quinto se analiza la propagación de la fisura a partir de la Ley de Paris y de la expresión cerrada de cálculo del FIT desarrollada en el capítulo anterior, y se recogen, validan y discuten los resultados obtenidos.

El sexto capítulo se dedica a la exposición de las aportaciones, conclusiones y las posibles líneas de trabajo futuro.

A continuación, se incluyen las referencias bibliográficas utilizadas durante el desarrollo de la Tesis Doctoral.

2

Antecedentes

En este segundo capítulo se exponen los conceptos que se han utilizado como base del trabajo para la realización de la presente Tesis Doctoral. El capítulo incluye, en primer lugar, una introducción de los conceptos básicos de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal relacionados con los estudios llevados a cabo en la Tesis. A continuación se realiza una presentación de los primeros trabajos sobre el comportamiento dinámico de ejes fisurados. Se detallan los modelos de apertura y cierre de la fisura utilizados con más frecuencia. En este contexto, se describen también los modelos más relevantes que han sido utilizados por diversos investigadores para el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones en ejes, que son el objeto principal de esta Tesis, así como los modelos de propagación de fisuras de fatiga en ejes giratorios.

2.1 Conceptos básicos de la Mecánica de la Fractura

La Mecánica de la Fractura es una disciplina nacida a principios del siglo XX que se ha desarrollado rápidamente en las últimas décadas partiendo de una fuerte base teórica hasta alcanzar importantes aplicaciones prácticas. Su objeto es analizar y determinar el comportamiento de los elementos mecánicos considerando la existencia de defectos, sea cual sea su origen, hasta definir las condiciones o criterios de rotura.

2.1.1 Planteamiento local de la fractura

La Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL) es la primera teoría desarrollada específicamente para explicar la propagación de fisuras y la fractura de componentes mecánicos. Fue propuesta inicialmente por Griffith [14] y desarrollada posteriormente por Irwin [15]. La principal aplicación de la MFEL consiste en explicar y predecir la rotura de materiales frágiles, en los que la rotura aparece en presencia de muy poca plasticidad. Inicialmente se aplicó exclusivamente a los materiales metálicos, sobre todo aceros de alta resistencia y aceros estructurales con zonas fragilizadas, y aunque hoy en día se sigue empleando con éxito en estos materiales, su campo de aplicación se ha ampliado a los materiales cerámicos e incluso a algunos polímeros [16].

Una fisura contenida en un sólido puede estar sometida a tres modos de fractura diferentes, que dependen de la dirección de aplicación de la carga con respecto al plano de esta (ver figura 2.1). En el modo *I* (apertura) las tensiones de los labios de la fisura son normales y simétricas respecto al plano de la misma y los desplazamientos son también perpendiculares a ella, mientras que en el modo *II* (cortadura) las tensiones y los desplazamientos de los labios de la fisura están contenidos en el plano de la misma y la dirección de propagación coincide con la dirección de la tensión. Por último, en el modo *III* (cizalladura) las tensiones y

los desplazamientos de los labios de la fisura están contenidos en el plano de la misma y la dirección de propagación es perpendicular a la de sollicitación.

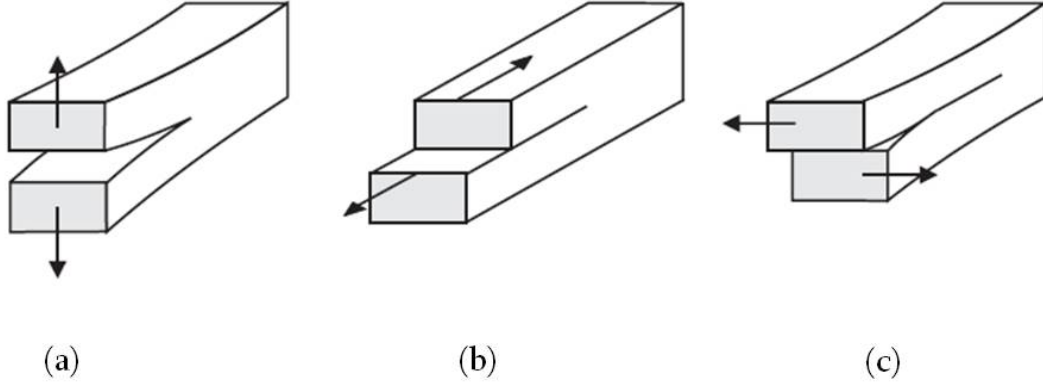


Figura 2.1: Modos básicos de fractura: (a) Modo *I* o de apertura, (b) Modo *II* o de cortadura, (c) Modo *III* o de cizalladura

Estos tres modos de fractura pueden aparecer de forma individual (modos puros) o de forma conjunta (modos mixtos). La superposición de los tres modos de fractura permite el estudio de cualquier situación de carga sobre la fisura. Generalmente, el modo *I* es el más habitual e importante y el más ampliamente estudiado.

El principio fundamental de la Mecánica de la Fractura establece que todos los procesos de fractura tienen lugar en una pequeña zona situada alrededor del frente de la fisura, mientras que el resto del sólido mantiene su comportamiento. Los campos de tensiones y desplazamientos en las proximidades del extremo de una fisura contenida en un sólido bidimensional, homogéneo e isótropo, que se propaga en modo *I*, vienen caracterizados por un parámetro denominado Factor de Intensidad de Tensiones (FIT), que depende de la geometría del sólido, de su estado tensional y de la profundidad de la fisura [17, 18, 19] y pueden escribirse como:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \hat{\sigma}_{ij}(\phi) \quad (2.1)$$

$$u_i = \frac{K_I}{2\nu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \hat{u}_i(\phi, \nu) \quad (2.2)$$

donde σ_{ij} y u_i son las componentes del tensor de tensiones y del campo de desplazamientos, respectivamente, referidos a un sistema de coordenadas móvil, x-y, cuyo origen coincide con el extremo de la fisura; K_I es el Factor de Intensidad de Tensiones en modo I; ν es el coeficiente de Poisson; r y ϕ son las coordenadas de un punto en un sistema de referencia polar con origen en el extremo de la fisura (figura 2.2); $\hat{\sigma}_{ij}$ es una función que depende de ϕ ; y \hat{u}_i es una función que depende de ϕ y de ν .

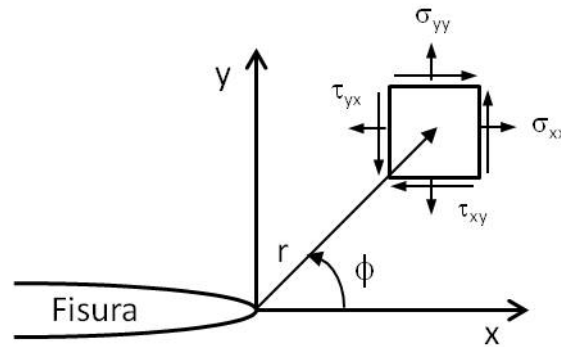


Figura 2.2: Definición del sistema de coordenadas en el extremo de la fisura

Las ecuaciones 2.1 y 2.2 corresponden al primer término de un desarrollo en serie infinito. Las características esenciales de la solución tensional expresada en la ecuación 2.1 son las siguientes:

- Es una solución asintótica, puesto que es el primer término de una solución infinita que constituye la solución completa. Por lo tanto es válida en el entorno de $r = 0$.
- Es una solución singular, es decir, predice valores infinitos de la tensión en el mismo extremo de la fisura ($r = 0$).

El FIT define la magnitud de las tensiones locales en el entorno del fondo de la fisura y en general suele expresarse mediante la expresión [16, 20]:

$$K_I = F_I \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.3)$$

donde σ es la tensión de referencia que depende de la sollicitación externa; F_I es el factor de corrección adimensional que depende de la geometría de la fisura, también denominado FIT adimensional; y a es la profundidad de la fisura.

La fisura se propagará cuando el FIT alcance un valor crítico, denominado tenacidad de fractura K_{IC} , que es una propiedad del material.

De esta manera, el criterio local de fractura en Modo I queda determinado de la siguiente manera:

$$K_I \geq K_{IC} \quad (2.4)$$

2.1.2 Planteamiento global de la fractura

El criterio global de fractura se basa en el principio de conservación de la energía. Se define la tasa de liberación de energía, G , a partir de la definición original de Griffith [14] e Irwin [15]:

$$G = \frac{dF}{da} - \frac{dU}{da} \quad (2.5)$$

donde F es el trabajo realizado por las fuerzas exteriores y U es la energía de deformación. Para que la fisura se propague es necesario que la tasa de liberación de energía sea mayor que la resistencia al avance de la fisura (que se representará por R). La función G puede calcularse y depende de la tensión, de la profundidad de la fisura y de la geometría del sólido. Por el contrario, el valor de R es una propiedad del material que debe determinarse experimentalmente. Por lo tanto, el criterio de iniciación quedará reducido a la expresión:

$$G \geq R \quad (2.6)$$

La tasa de liberación de energía G y el FIT están relacionados mediante la expresión [16]:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.7)$$

donde $E' = E$ en tensión plana y $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ en deformación plana.

En el caso de la MFEL, $G = J$, donde J es la integral J [21].

2.1.3 Simplificación del problema tridimensional

Cuando se quiere abordar el estudio de problemas tridimensionales es posible la aproximación mediante modelos 2D, dada su sencillez, siempre que se cumpla la condición de deformación plana. Si se considera una placa fisurada de espesor B , sometida al estado de carga que se muestra en la figura 2.3, el estado tensional generado en el centro de la placa ($z = 0$) corresponderá al de un problema 2D con condiciones de deformación plana. En la superficie de la placa ($z = B/2$), el estado tensional corresponderá al de un problema 2D con condiciones de tensión plana, debido a que no existe ninguna tensión normal a la superficie libre ($\sigma_{zz} = 0$). Por tanto, el espesor de la placa influye en el estado de tensiones existente en el frente de la fisura. Para mantener un estado de deformación plana en la mayor parte de la placa es necesario que dicho espesor sea suficientemente grande, ya que las superficies estarán siempre sometidas a tensión plana. Si el espesor es pequeño, en la totalidad de la fisura se desarrolla un estado de tensión plana.

La norma ASTM E399 [22] fija que se puede considerar deformación plana en toda la sección a partir del siguiente espesor:

$$B \geq 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (2.8)$$

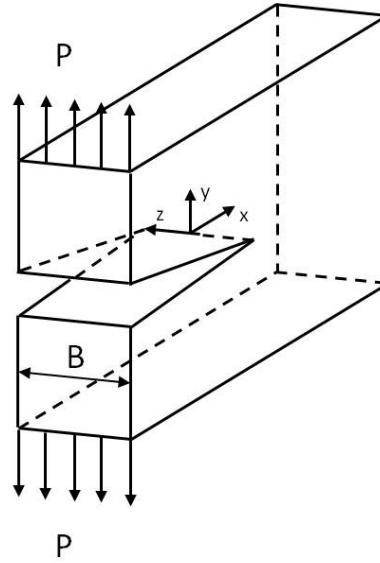


Figura 2.3: Probeta tridimensional fisurada

donde σ_{ys} es el límite elástico del material. Por lo tanto, a partir de cierto valor del espesor, se puede utilizar la formulación 2D para analizar un problema 3D.

2.2 Comportamiento de ejes fisurados

2.2.1 Ejes rotatorios fisurados

La dinámica de ejes es una rama de la Mecánica Aplicada que analiza y predice el comportamiento de ejes o rotores en condiciones dinámicas. Las primeras investigaciones realizadas en el campo de la rotodinámica se iniciaron por Rankine [23], quien predijo que a partir de una cierta velocidad de giro, el eje se deforma considerablemente y comienza a girar en torno a esta nueva posición. La investigación en este campo progresó significativamente a finales del siglo XIX gracias a las contribuciones de De Laval, así como de otros investigadores [24, 25].

En 1919, Jeffcott [26] publicó el primer artículo relacionado con la teoría fundamental de la dinámica de ejes. El modelo de Jeffcott considera un eje sin masa

con un disco situado en su sección central. Este sistema de rotor fundamental simplificado ha sido muy utilizado para analizar el comportamiento de ejes fisurados [1, 3, 27, 28, 29, 30]. En la figura 2.4 se puede observar el modelo de eje de Jeffcott.

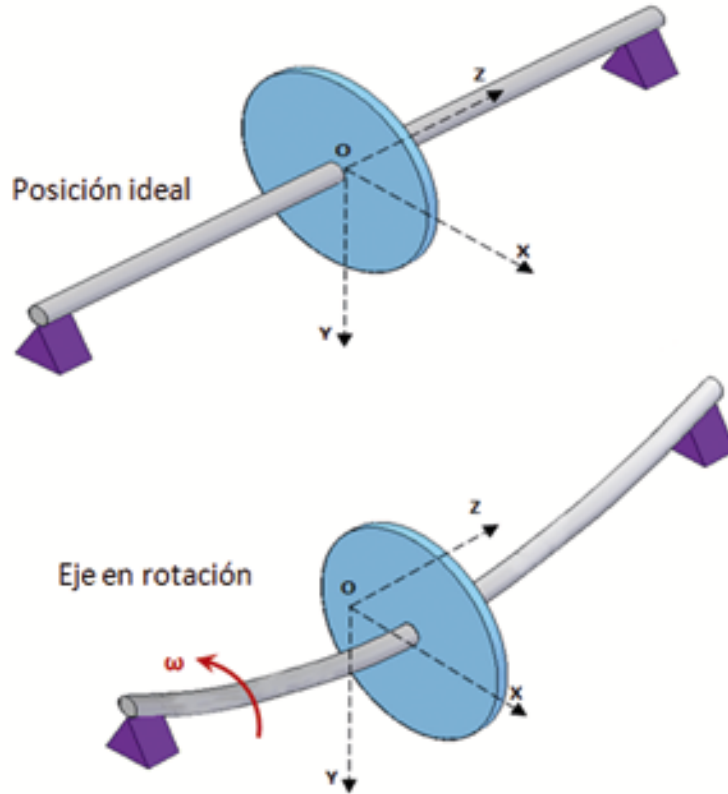


Figura 2.4: Modelo de eje de Jeffcott

Otros autores analizan sistemas de ejes complejos mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF). Se han usado modelos muy diversos, desde los más sencillos que utilizan elementos tipo viga [31, 32, 33], hasta los más detallados correspondientes a estudios tridimensionales [34, 4, 5].

Las primeras investigaciones sobre el comportamiento dinámico de ejes fisurados se remontan a la década de los 70's del siglo XX [27] y desde ese momento se ha continuado trabajando intensamente en el tema. Existen excelentes revisiones bibliográficas de los estudios más relevantes en relación con la dinámica de ejes fisurados como las realizadas por Wauer [35], Gasch [1], Dimarogonas [36], Sabnavis et al. [37] y Papadopoulos [29].

La mayoría de los trabajos indicados anteriormente se centran en el análisis de los cambios en el comportamiento estático y dinámico que se producen respecto a los ejes intactos. La presencia de fisuras en ejes provoca un aumento de la flexibilidad local del elemento, que se traduce, por ejemplo, en el incremento de los desplazamientos y la disminución de las frecuencias de vibración.

2.2.2 Tipología de fisuras en ejes giratorios

Para abordar de manera simplificada el estudio del comportamiento de los ejes fisurados y la obtención de la flexibilidad, muchos autores consideran que las fisuras de fatiga en un eje presentan frente recto [28, 31, 38, 2, 30]. Aunque esta hipótesis es válida y conduce a resultados conservadores no representa la realidad de los ejes giratorios fisurados, en los que la fisura presenta un frente aproximadamente elíptico [9, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 12] (ver figura 2.5).

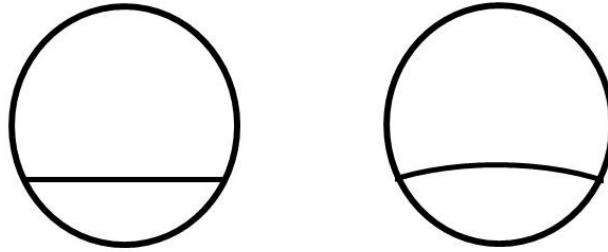


Figura 2.5: Fisuras recta y elíptica

2.2.3 Modelos de comportamiento de la fisura en ejes giratorios

Un aspecto muy importante a tener en cuenta en la dinámica de ejes fisurados es el estado de la fisura durante el giro del eje. Aunque algunos autores han considerado la fisura permanentemente abierta [31, 32], esta hipótesis no es realista en el caso de una fisura de fatiga y en el caso de un eje que gira. Cuando un eje gira,

la fisura se abre o se cierra dependiendo de si se encuentra sometida a esfuerzos de tracción o de compresión. La apertura y el cierre de la fisura provocan que la rigidez del eje varíe en función de la posición angular en la que se encuentra la fisura respecto del sistema de referencia fijo. De esta forma, la rigidez del eje cuando la fisura se encuentra cerrada será máxima, es decir el eje fisurado se comportará como un eje que no estuviese dañado. Mientras que, por otro lado, la rigidez del eje fisurado será mínima cuando la fisura alcance su completa apertura. En la figura 2.6 se representan estos dos casos extremos:

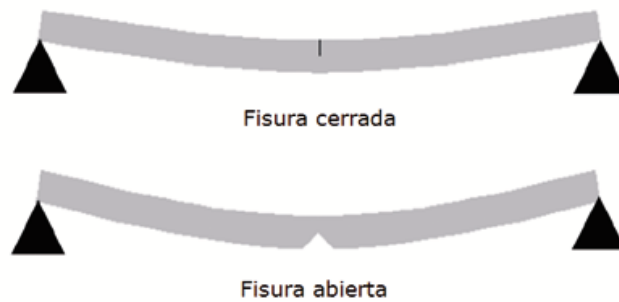


Figura 2.6: Esquema de las situaciones de fisura completamente cerrada y completamente abierta

Para modelar la variación del comportamiento del eje rotatorio debida a la fisura, se hace necesaria la utilización de una función de flexibilidad local $g(\theta)$ (inversa de la función de rigidez), dependiente del ángulo girado θ .

Los modelos más habitualmente utilizados para definir esta función de apertura y cierre son:

- **Modelos de fisura abierta**, en estos modelos la fisura se encuentra siempre abierta durante todo el giro [31, 32, 46]. La función de apertura y cierre se puede escribir como:

$$g(\theta) = 1 \quad (2.9)$$

y su correspondiente gráfica se observa en la figura 2.7.

- **Modelos de fisura abierta o cerrada (*switching crack*)**, en estos modelos la fisura se encuentra completamente abierta o completamente cerrada

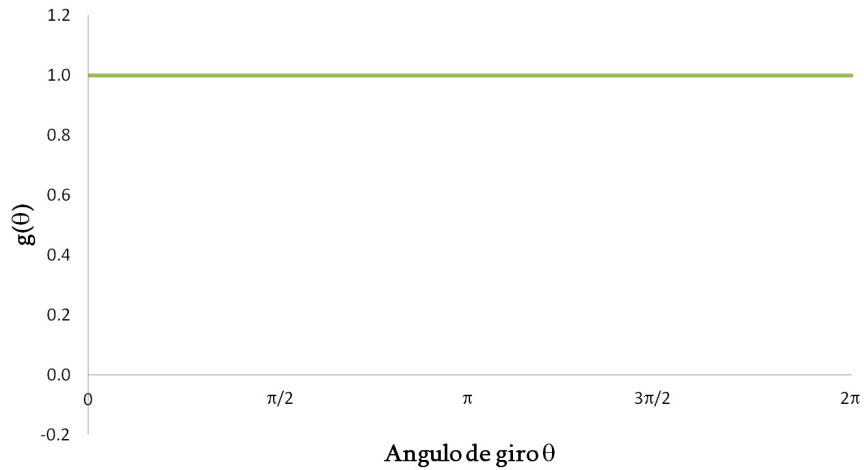


Figura 2.7: Función de apertura y cierre del modelo de fisura abierta

y no se tiene en cuenta la apertura y el cierre parciales de la misma. Gasch [1, 47] utilizó este modelo para definir la apertura y el cierre de la fisura, la función que propuso para determinar el cambio de la flexibilidad presenta los valores de 0 cuando la fisura se encuentra cerrada (comportándose el eje fisurado como un eje intacto) y de 1 cuando la fisura se encuentra abierta (ver figura 2.8), por lo tanto, la transición de la flexibilidad máxima a la flexibilidad mínima se considera como una transición brusca [48, 49, 50].

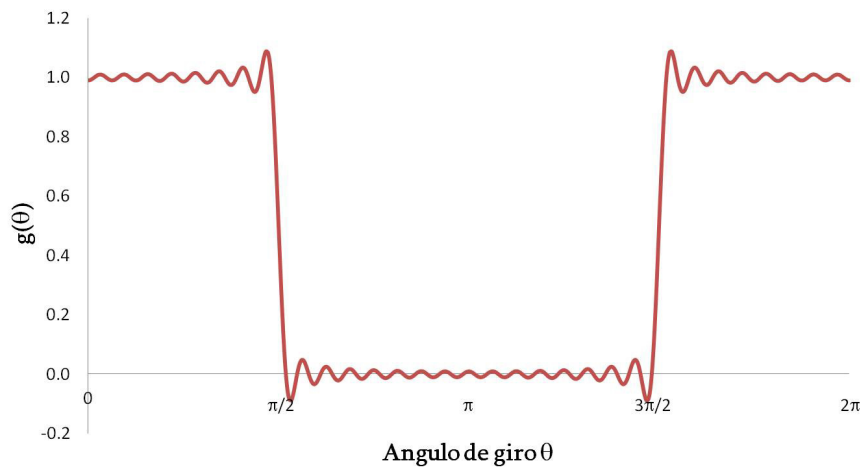


Figura 2.8: Función de apertura y cierre propuesta por Gasch [1]

La función de apertura y cierre propuesta por Gasch truncada en el noveno término (17° armónico) es la siguiente:

$$g(\theta) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{\pi}{4} + \cos \theta - \frac{1}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{5} \cos 5\theta - \frac{1}{7} \cos 7\theta + \frac{1}{9} \cos 9\theta - \frac{1}{11} \cos 11\theta + \frac{1}{13} \cos 13\theta - \frac{1}{15} \cos 15\theta + \frac{1}{17} \cos 17\theta - \dots \right) \quad (2.10)$$

- **Modelos de apertura y cierre gradual de la fisura (*breathing crack*)**, en estos modelos la cantidad de parte abierta de la fisura cambia continuamente con la rotación del eje, por lo tanto se consideran estados de apertura y cierre parciales de la misma.

Mayes y Davies [2] propusieron una función cosenoidal (ecuación 2.11) que representa muy bien el comportamiento de las fisuras de mayor profundidad ($\frac{a}{D} \geq 0,25$, siendo D el diámetro del eje) (ver figura 2.9).

$$g(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad (2.11)$$

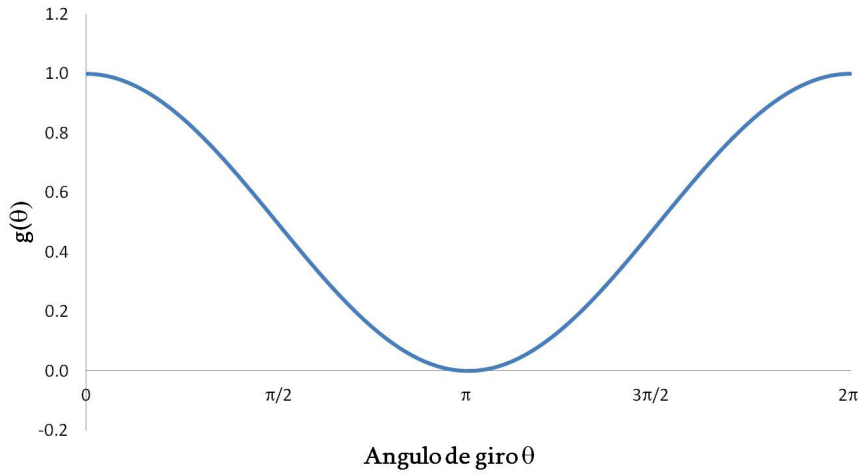


Figura 2.9: Función de apertura y cierre propuesta por Mayes y Davies [2]

Este modelo de apertura y cierre gradual de la fisura, en el que se representa la transición de la flexibilidad máxima a la mínima mediante una función trigonométrica, ha sido utilizado por diversos autores [2, 51, 52, 53, 54].

Algunos investigadores, como Darpe et al. [3], asumieron un modelo de apertura y cierre gradual de la fisura basado en el concepto de 'línea de cierre de fisura' (LCF). La LCF es una línea imaginaria perpendicular al frente de una fisura recta, que separa la parte abierta y la parte cerrada

de la fisura, como se ilustra en la figura 2.10. La posición de la LCF va cambiando a lo largo del giro del eje. Cuando el eje está en la posición inicial $\theta = 0$, (figura 2.10a), la fisura está completamente cerrada bajo la acción de la gravedad y sometida a esfuerzos de compresión. A medida que el eje comienza a girar en sentido horario, la fisura comienza a abrirse. Para $\theta = \pi$, (figura 2.10e), la fisura se encuentra sometida a esfuerzos de tracción y por lo tanto completamente abierta, y la LCF se traslada desde la esquina B a la esquina A. Cuando el eje continúa girando, la fisura vuelve a cerrarse por completo en $\theta = 2\pi$.

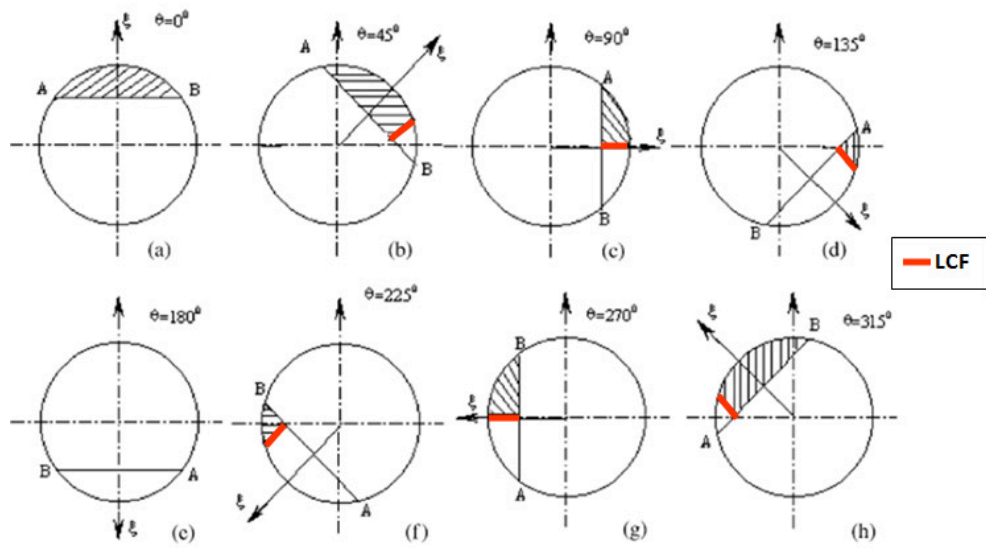


Figura 2.10: Variación de la posición de la línea de cierre de la fisura (LCF) con la posición angular del eje en el modelo de apertura y cierre, Darpe et al. [3] (la zona cerrada aparece rayada)

Otras aproximaciones al comportamiento de las fisuras que abren y cierran se han hecho numéricamente. Bachschmid et al. [4] investigaron el mecanismo de apertura y cierre en ejes giratorios mediante el Método de Elementos Finitos (MEF) considerando una fisura de frente recto. Para ello, desarrollaron un modelo de elementos finitos tridimensional de un eje sometido a una carga de flexión para las diferentes posiciones angulares del eje fisurado. Como puede observarse en la figura 2.11, existen algunas diferencias importantes con respecto al modelo de apertura y cierre utilizado por Darpe et al. [3]. El modelo de elementos finitos predice menos apertura al principio, ya que en una posición angular de $\pi/4$ la fisura se encuentra prácticamente cerrada, para $\pi/2$ la apertura es mayor que en el modelo LCF propuesto por

Darpe et al. [3] y en $3\pi/4$ prevé que la fisura ya se encuentra completamente abierta a diferencia de lo que ocurre en el modelo de Darpe et al.

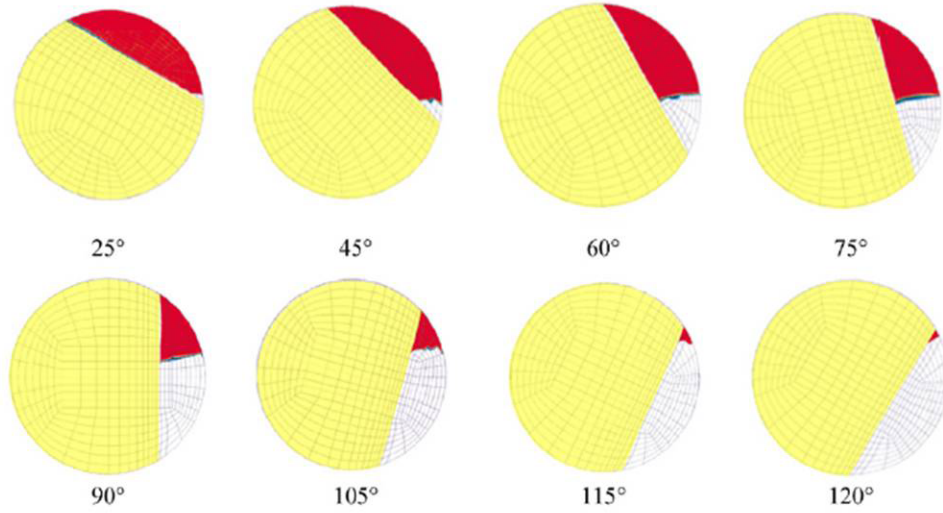


Figura 2.11: Zonas abiertas y cerradas (zona de color rojo) en diferentes posiciones angulares para $\alpha = 0,25$, Bachschmid et al. [4]

En un artículo más reciente, Kulesza y Sawicki [5] también propusieron un modelo numérico de apertura y cierre de la fisura. Utilizaron un nuevo elemento finito para modelar la fisura, y asumieron que dicho elemento se puede encontrar en tres estados: abierto, cerrado y sin fisurar (ver figura 2.12). Los elementos abiertos o cerrados determinan la porción de la sección que está fisurada y por el contrario, los elementos sin fisurar determinan la porción de la sección que permanece intacta. La rigidez de los elementos sin fisurar permanece constante, mientras que la rigidez de los elementos abiertos o cerrados cambia continuamente con la rotación del eje.

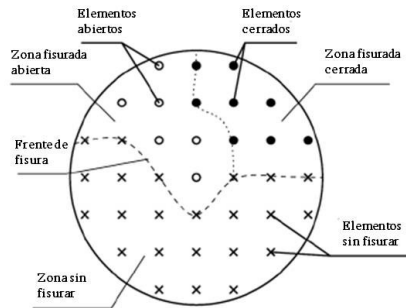


Figura 2.12: Sección transversal de la zona fisurada parcialmente cerrada, Kulesza y Sawicki [5]

2.3 Cálculo del FIT en ejes fisurados

El comportamiento mecánico de los ejes fisurados se puede abordar a partir del conocimiento del parámetro característico basado en la Mecánica de la Fractura (FIT), cuya relación con la flexibilidad local es directa. En este apartado se exponen diversos estudios del FIT, clasificados en dos grupos: aquellos relacionados con ejes fisurados no rotatorios y los correspondientes a ejes fisurados rotatorios.

2.3.1 Cálculo del FIT en ejes fisurados no rotatorios

Ejes con fisuras de frente recto

En un principio, en la mayor parte de los estudios que se llevaron a cabo, se consideraba que la fisura presentaba un frente recto. Entre estos cabe destacar los trabajos de Blackburn [55] y Carpinteri [56], donde se calculó el FIT a lo largo del frente de fisura de una barra cilíndrica sometida a tracción y a flexión mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF).

Por otra parte, Valiente [57] obtuvo el FIT en el punto central de una fisura de frente recto contenida en una pieza cilíndrica sometida a tracción, mediante la aplicación del método de la rigidez diferencial en combinación con el de elementos finitos. A partir de los resultados obtenidos desarrolló una expresión de ajuste polinómico que permite estimar el valor del FIT adimensional. Esta expresión depende única y exclusivamente de la profundidad relativa de la fisura.

Otros autores, como Bush [58] y Ouchterlony [59], determinaron experimentalmente el FIT en fisuras de frente recto mediante métodos basados en la flexibilidad introducida por la fisura (crack compliance methods).

Ejes con fisuras de frente semielíptico

Las primeras fisuras de frente no recto en ejes que se analizaron para la obtención del FIT fueron las fisuras de frente circular [60, 61] y posteriormente los estudios se extendieron a ejes que presentaban fisuras con frente elíptico [39, 62, 40, 9, 63, 64, 65, 41].

En la figura 2.13 se muestra la sección en la zona de la fisura de un eje que presenta una fisura de frente semielíptico.

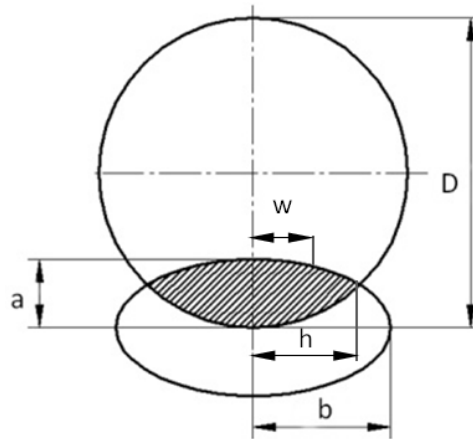


Figura 2.13: Sección transversal de la zona fisurada y parámetros característicos de una fisura elíptica

Los parámetros que habitualmente se emplean para caracterizar una fisura elíptica son:

- $\alpha = \frac{a}{D}$ Profundidad relativa de la fisura
- $\beta = \frac{a}{b}$ Factor de forma de la fisura
 - * $\beta = 0$ corresponde a una fisura de frente recto
 - * $0 < \beta < 1$ corresponde a una fisura de frente elíptico
 - * $\beta = 1$ corresponde a una fisura de frente semicircular
- $\gamma = \frac{w}{h}$ Posición relativa en el frente de fisura

Los métodos de cálculo del FIT, se han clasificado en tres grupos: analíticos, numéricos y experimentales.

- **Métodos analíticos.** Se han utilizado varios tipos de métodos analíticos, entre los que cabe destacar los basados en el análisis de la integral de contorno, integral J , i.e. [66] y los basados en expresiones clásicas de Mecánica de la Fractura, i.e. [67].
- **Métodos numéricos.** Los métodos numéricos usados para el cálculo del FIT son principalmente el Método de los Elementos Finitos (MEF) [42, 68, 62, 66, 44, 9], entre otros, y en menor medida el Método de los Elementos de Contorno (MEC) [69, 70].

Los estudios numéricos permiten obtener los valores del FIT en el frente, a partir de los cuales se pueden desarrollar expresiones cerradas para su cálculo.

- *Expresiones del FIT en un punto del frente de la fisura*, como por ejemplo el punto central o los puntos próximos a los extremos. Por lo general, estas expresiones dependen de la profundidad relativa de la fisura α y del factor de forma β .

$$F_I = F_I(\alpha, \beta) \quad (2.12)$$

De esta manera Astiz [42] propuso el cálculo del FIT en el centro de la fisura partiendo de la tasa de liberación de energía calculada mediante el método de extensión virtual de fisura.

Shih y Chen [68] realizaron una serie de ajustes polinómicos para el centro y el extremo de la fisura basándose en los resultados numéricos obtenidos por Carpinteri [56, 43].

En el modelo propuesto por Couroneau y Royer [62] se obtuvo una aproximación polinómica del FIT en modo I en el punto central del frente de fisura a partir de los resultados de los desplazamientos de puntos situados en las caras de la misma de una barra cilíndrica sometida a tracción y a flexión considerando un estado de deformación plana.

- *Expresiones del FIT para cualquier punto del frente de la fisura.* Al igual que en el caso anterior, estas expresiones dependen de la profundidad relativa de la fisura α , del factor de forma β y adicionalmente de la posición relativa en el frente de la misma γ :

$$F_I = F_I(\alpha, \beta, \gamma) \quad (2.13)$$

Levan y Royer [66] calcularon el FIT en modo *I*, *II* y *III* para fisuras de frente semielíptico en una barra cilíndrica sometida a tracción, flexión y torsión, a partir de la ecuación de la integral de contorno desarrollada para problemas de fractura, y utilizaron el método de mínimos cuadrados para ajustar los valores discretos a una forma polinómica.

Shih y Chen [44] obtuvieron el FIT a partir de los desplazamientos en cada uno de los puntos del frente de fisura de una barra cilíndrica sometida a tracción y a flexión.

Shin y Cai [9] evaluaron el FIT numéricamente a lo largo del frente de una fisura elíptica, situada en una barra cilíndrica sometida a una carga de tracción y a una carga de flexión.

- **Métodos experimentales**, estos métodos son aquellos que permiten obtener experimentalmente información sobre el campo tensiones, deformaciones o desplazamientos, para a partir de ellos, calcular el FIT. Entre los diferentes procedimientos cabe destacar los siguientes:
 - *Fotoelasticidad*, mediante este procedimiento es posible visualizar el lugar geométrico de los puntos del sólido donde la diferencia de tensiones principales es una constante conocida. Lorentzen et al. [67] propusieron un método de cálculo del FIT mediante el uso de métodos de fotoelásticos en dos y tres dimensiones con ejes fisurados de un material birrefringente.
 - *Fractografía*, esta técnica ha sido utilizada por Mackay y Alperin [71], Forman y Shivacumar [60], Harkegard [72] y Fonte [73]. El método consiste en el estudio de las superficies de fractura mediante un microscopio de barrido electrónico. Se mide la forma, la longitud del arco y la profundidad de la fisura, y basándose en la evolución de la forma de la misma, se desarrolla un método para la obtención el FIT en fisuras semielípticas bajo diferentes estados de carga.

2.3.2 FIT en ejes fisurados rotatorios

Los modelos de cálculo del FIT en ejes fisurados rotatorios consideran diferentes posiciones angulares de la fisura para simular la rotación del eje. Entre los trabajos más relevantes cabe destacar el desarrollado por Carpinteri [6] que analizó, como paso previo al estudio de la propagación de una fisura en un eje cilíndrico giratorio que soporta un momento flector, la distribución del FIT a lo largo del frente de fisura semielíptico, para diferentes posiciones angulares (θ) en función del factor de forma β , de la profundidad relativa α y de la posición relativa en el frente de la fisura γ (figura 2.14).

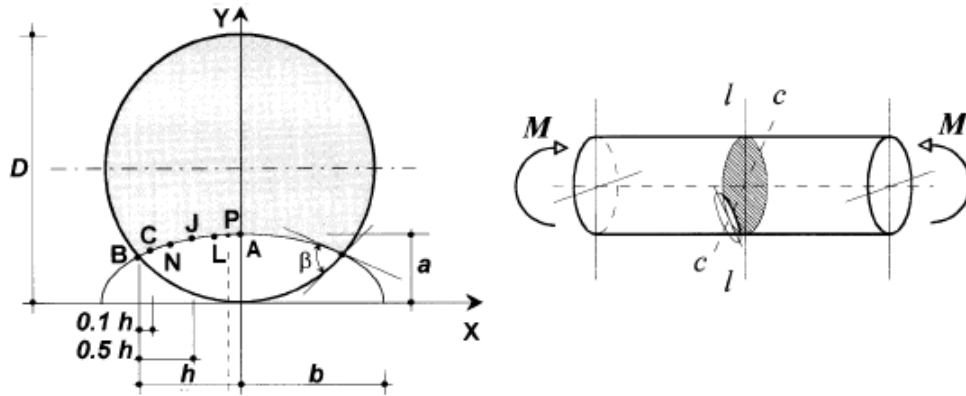


Figura 2.14: Caracterización de las fisuras en el modelo de Carpinteri [6]

En este estudio se calculó el FIT adimensional a lo largo del frente para dos posiciones angulares ($F_I(0^\circ)$ y $F_I(90^\circ)$), y a partir de los resultados obtenidos se obtuvo una expresión del FIT para el resto de valores de θ :

$$F_I(\theta) = F_I(0^\circ) \cos \theta + F_I(90^\circ) \sin \theta \quad (2.14)$$

La figura 2.15 muestra el FIT adimensional a lo largo del frente de fisura para el caso de $\alpha = 0,2$ y $\beta = 0,2$ y diferentes valores de θ .

Se puede observar que para ciertas combinaciones de posición angular y posición en el frente el FIT es negativo. El cambio de signo indica la transición de fisura abierta a fisura cerrada. Valores positivos del FIT se corresponden con fisura abierta, sometida a esfuerzos de tracción y, por el contrario, los valores ne-

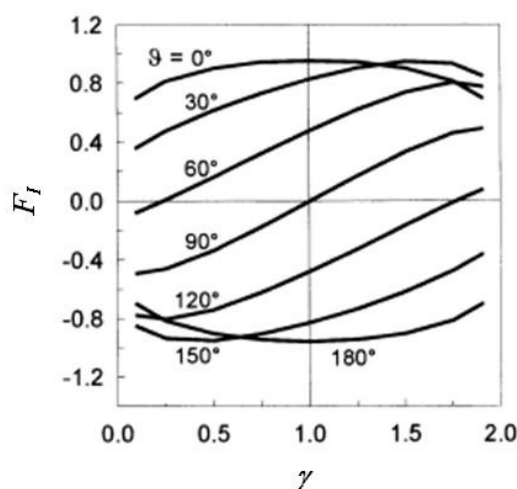


Figura 2.15: FIT adimensional a lo largo del frente de fisura para diferentes valores de θ [6]

gativos se corresponden con la fisura cerrada, sometida a esfuerzos de compresión. Sin embargo, cuando la fisura está cerrada el eje se debería comportar como si no estuviese dañado, por lo tanto el FIT debería ser nulo y la gráfica 2.15 solo tendría validez para los valores positivos del FIT, es decir, cuando la fisura está abierta.

2.4 Propagación de fisuras

La propagación de fisuras de fatiga es uno de los aspectos más importantes en la evaluación de la seguridad estructural de componentes mecánicos. Desde los años 60 del siglo pasado se ha estudiado detenidamente el proceso de propagación estable de fisuras, tratando de obtener la tasa de crecimiento, que se expresa en términos del incremento de longitud de fisura por ciclo, da/dN . Generalmente, si el rango de tensiones aplicadas es constante, la velocidad de crecimiento de la fisura aumenta con el número de ciclos [74].

Si se realiza la representación gráfica de la tasa de crecimiento frente al FIT en un diagrama logarítmico, se obtiene una curva como la representada en la figura 2.16, en la que se observan tres zonas claramente diferenciadas: la región I o

próxima al umbral, la región *II* o intermedia y la región *III* de rápida propagación de la fisura:

- Región *I*: se corresponde con la fase de iniciación y está muy influida por la microestructura del material, por la relación entre las tensiones máxima y mínima ($R = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$), y por el medio ambiente que rodea la fisura. En esta zona tanto la fisura como su crecimiento son pequeños y su comportamiento no es interpretable mediante criterios de fractura lineal. Por debajo del valor umbral, ΔK_{th} , las fisuras no se propagan.
- Región *II*: se corresponde con la zona intermedia de la curva. En esta región, a diferencia de lo que ocurre en la región *I*, la influencia de la microestructura, de la relación entre las tensiones y del medio ambiente son poco importantes. Este tramo central, para muchos materiales, viene representado en el diagrama doblemente logarítmico por una recta, lo que simplifica mucho el estudio de la propagación de la fisura.
- Región *III*: en este tercer tramo, la velocidad de crecimiento de la fisura se incrementa hasta que se produce la rotura del componente. En esta región existe una gran influencia de la microestructura y de la relación tensional.

Paris y Erdogan [75] fueron los primeros en proponer un método para la predicción de la propagación de fisuras de fatiga para la zona *II*. Demostraron que la velocidad de crecimiento de la fisura en un determinado punto del frente, da/dN , está relacionada con la variación del FIT, $\Delta K = K_{I_{max}} - K_{I_{min}}$, a través de la siguiente expresión:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (2.15)$$

donde C y m son constantes del material. La ecuación 2.15, conocida como Ley de Paris-Erdogan, representa una variación lineal entre el log da/dN y log ΔK , que se corresponde con la región *II* de la curva de la velocidad de crecimiento de

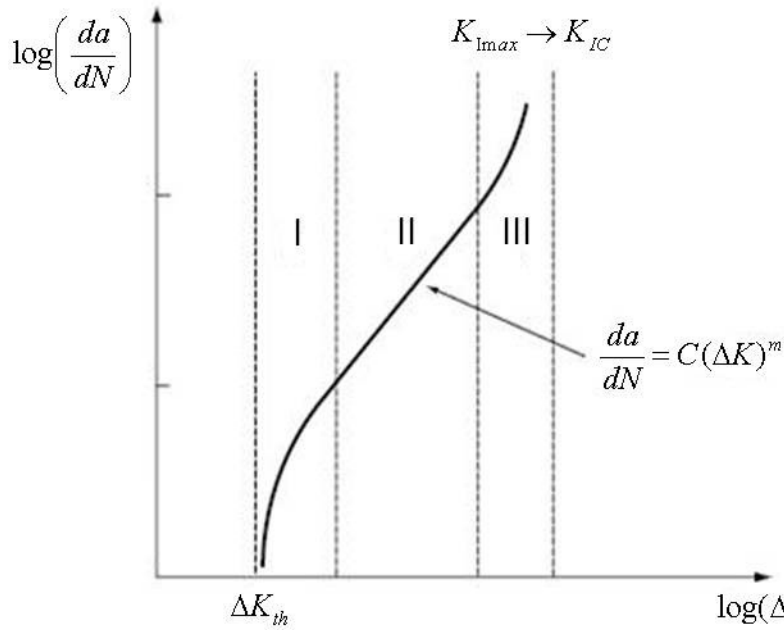


Figura 2.16: Tasa de crecimiento de fisura y factor de intensidad de tensiones

fisuras por fatiga (ver figura 2.16). La integración de esta ley permite determinar el número de ciclos que son necesarios para que la fisura crezca hasta un tamaño determinado o el tamaño puede alcanzar una fisura tras sufrir un determinado número de ciclos.

En la literatura existen diferentes modelos empíricos y semi-empíricos, más complejos que la Ley de Paris, que incorporan el comportamiento de la fisura en las regiones *I* y *III* y prueban que la tensión media R influye sobre el crecimiento de la misma.

Walker [76] propuso una expresión que tiene en cuenta la influencia de la tensión media R :

$$\frac{da}{dN} = C_1 \left(\frac{\Delta K}{(1 - R)^{1-\tau}} \right)^{m_1} \quad (2.16)$$

Los valores de C_1 , τ y m_1 dependen del material.

Forman et al. [77] desarrollaron un modelo que tiene en cuenta además del efecto de las tensiones medias R , el efecto asintótico de la curva para valores de ΔK próximos a K_{IC} :

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_2 \Delta K^{m_2}}{(1-R)K_{IC} - \Delta K} \quad (2.17)$$

Los coeficientes C_2 y m_2 , que también dependen del material, deben ser obtenidos de forma experimental, siendo más costosos de conseguir que los correspondientes a la Ley de Paris. Esta ecuación interpreta bien el caso de fallo por fractura frágil, pero no el que se produce por alcanzarse la tensión de rotura del material.

Elber [78] introdujo el concepto de cierre de fisura y sugirió que la velocidad de crecimiento de la fisura es función ΔK_{eff} :

$$\frac{da}{dN} = \Delta K_{eff}^m \quad (2.18)$$

donde $\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{abierta}$, siendo $K_{abierta}$ el FIT en el que la fisura se encuentra completamente abierta y K_{max} el FIT máximo durante un ciclo de carga.

Collipriest [79] propuso una expresión matemática capaz de describir el crecimiento en las tres regiones y que además, tiene en cuenta el efecto de las tensiones medias R :

$$\log \frac{da}{dN} = C_1 + C_2 \tanh^{-1} \left(\frac{\log \left(\frac{\Delta K^2}{(1-R)K_{IC} \Delta K_{th}} \right)}{\log \left(\frac{(1-R)K_{IC}}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \quad (2.19)$$

donde $C_1 = \log(C_3(K_{IC} \Delta K_{th})^{m_3/2})$ y $C_2 = \log \left(\frac{K_{IC}}{\Delta K_{th}} \right)^{m_3/2}$

los valores de C_3 y m_3 dependen del material.

Todos estos modelos y otros similares [80, 81, 82, 83, 84] son escasamente utilizados en el ámbito de la ingeniería de diseño debido a su complejidad y al elevado número de parámetros que se necesitan determinar (aunque puedan tener interés en situaciones puntuales), por lo que en la práctica la Ley de Paris sigue siendo la más utilizada.

2.4.1 Propagación de fisuras en ejes

En este apartado se mencionan los modelos que se utilizan para analizar el crecimiento de fisuras por fatiga en ejes. Se han clasificado los diferentes modelos en dos grupos: basados en la Ley de Paris y basados en otras leyes de propagación.

La modelización geométrica de una fisura inicial en un eje, para el estudio de su posterior propagación, suele hacerse tomando como base una elipse de semiejes a y b (ec. 2.20) (ver figura 2.17), que en su crecimiento debido al giro alcanzará una nueva configuración definida por la ecuación de una elipse de semiejes a^* y b^* (ec. 2.21):

$$\frac{x^2}{(b)^2} + \frac{y^2}{(a)^2} = 1 \quad (2.20)$$

$$\frac{x^2}{(b^*)^2} + \frac{y^2}{(a^*)^2} = 1 \quad (2.21)$$

La hipótesis más utilizada para la modelización del crecimiento de fisuras en geometrías cilíndricas se basa en el avance de la fisura conforme a la Ley de Paris-Erdogan que considera que la propagación de la fisura es perpendicular al frente de la misma [7, 68, 62, 85, 86].

Entre los diferentes investigadores que utilizan la Ley de Paris para analizar el crecimiento de fisuras por fatiga cabe destacar a Carpinteri [7], que analizó la trayectoria de propagación de una fisura semi-elíptica de una barra sometida a una carga axial cíclica de amplitud constante (ver figura 2.18).

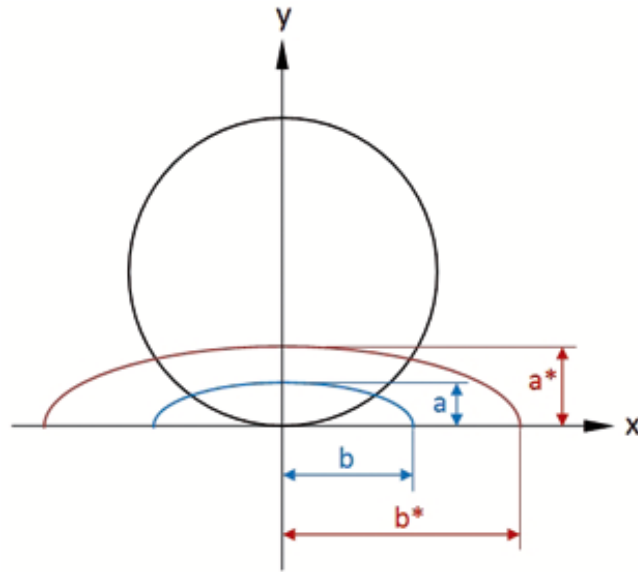


Figura 2.17: Modelización elíptica del frente de fisura

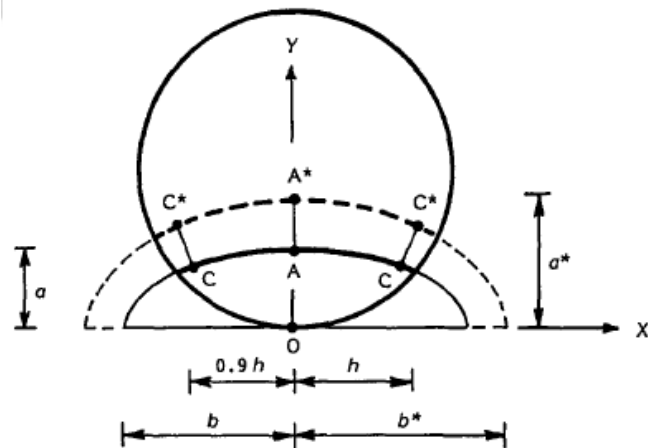


Figura 2.18: Restauración del frente de fisura de Carpinteri [7]

Por otro lado, el mismo autor, en un trabajo posterior [6], analizó la propagación de una fisura en un eje cilíndrico sometido a flexión rotativa utilizando un modelo teórico biparamétrico. Las trayectorias de propagación se determinaron aplicando el modelo teórico anterior basado en la Ley de Paris. Este autor consideró que en un giro completo del eje, el FIT, para un punto determinado del frente de fisura, pasa de un valor máximo $K_{I_{max}}$, a un valor mínimo $K_{I_{min}}$, por lo tanto, la variación del FIT que se introdujo en la Ley de Paris es:

$$\Delta K_{I\text{rotativo}} = K_{I\text{max}} - K_{I\text{min}} = 2K_{I\text{max}} \quad (2.22)$$

dado que Carpinteri considera que el valor mínimo del FIT en un giro es igual a $-K_{I\text{max}}$.

Lin y Smith en 1997 [85] estudiaron la evolución del frente de fisura en barras cilíndricas bajo tensión axial y determinaron el nuevo frente mediante una aproximación por splines cúbicos.

Dentro de los trabajos en los que se estudia el FIT bajo sollicitación axial cíclica se pueden citar los estudios realizados por Toribio et al. [8] y Matos et al. [87], quienes modelizaron el crecimiento de fisuras semielípticas en barras cilíndricas, mediante la utilización del método de mínimos cuadrados para reconstruir el nuevo frente (ver figura 2.19).

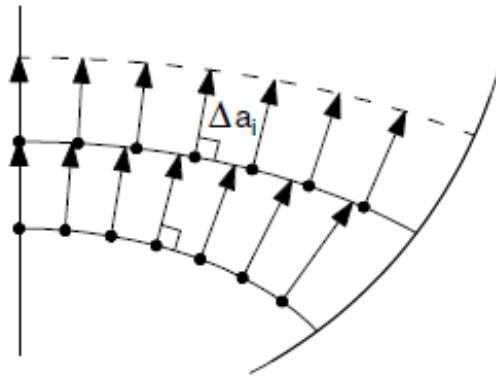


Figura 2.19: Restauración del frente de fisura de Toribio et al. [8]

De igual manera Couroneau y Royer [62, 88] utilizaron procedimientos similares para estudiar la propagación de fisuras de fatiga en barras sometidas a cargas de tracción o a flexión.

Algunos autores han utilizado otros criterios distintos a la Ley de Paris-Erdogan para caracterizar el crecimiento de fisuras elípticas por fatiga en ejes [89, 68], aunque su uso está muy poco extendido debido a su mayor complejidad. Shih y Chen [68] emplearon el modelo de Forman et al. [77], basado, a su vez, en

el modelo de propagación desarrollado por Raju et al. [61] y viene dado por la ecuación:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(1-f)^n \Delta K^n \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K}\right)^p}{(1-R)^n \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c}\right)^q} \quad (2.23)$$

donde C , n , p y q son constantes del material, f es función de la apertura de la fisura, R es la tensión media, K_c es el FIT crítico y K_{th} es el umbral del FIT.

3

Modelo numérico

En este capítulo se presenta el estudio numérico cuasiestático de un eje que presenta una fisura semielíptica, sometido a flexión rotatoria. Para la realización de dicho estudio se ha utilizado el Método de los Elementos Finitos (MEF) mediante un código comercial. En primer lugar, se hace una descripción del modelo, y posteriormente se muestran, analizan y validan los resultados obtenidos.

3.1 Modelo geométrico

Se ha desarrollado un modelo numérico 3D cuasiestático que ha permitido realizar un estudio pormenorizado del FIT a lo largo del frente de una fisura semi-elíptica sometida a flexión rotatoria, en función de las características de la fisura, profundidad y forma, de la posición relativa en el frente y del ángulo de giro del eje.

3.1.1 Planteamiento del problema

Se ha considerado un eje de aluminio de longitud $L = 900 \text{ mm}$ y diámetro $D = 20 \text{ mm}$, módulo de elasticidad $E = 72 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$ y densidad $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$, que contiene una fisura transversal de frente semi-elíptico en su sección central de profundidad a . El eje se encuentra biapoyado y está sometido a dos cargas puntuales $F = 100 \text{ N}$, que se aplican a una distancia d de los extremos del eje (ver figura 3.1), de manera que en la sección fisurada, se tiene un estado de flexión pura.

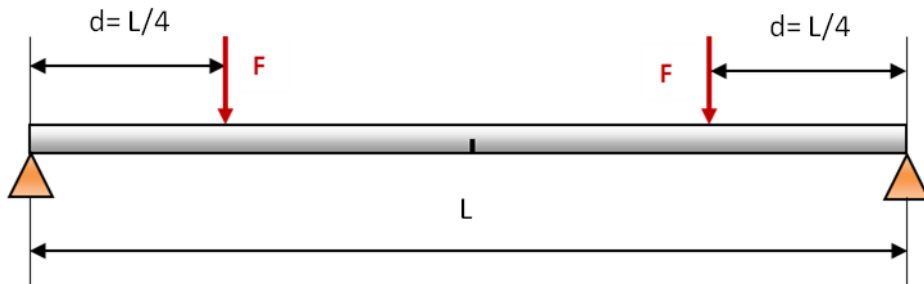


Figura 3.1: Esquema del eje fisurado

Los parámetros característicos de una fisura elíptica son los considerados en el apartado 2.3.1:

- $\alpha = \frac{a}{D}$ Profundidad de la fisura
- $\beta = \frac{a}{b}$ Factor de forma de la fisura

- * $\beta = 0$ corresponde a una fisura de frente recto
- * $0 < \beta < 1$ corresponde a una fisura de frente elíptico
- * $\beta = 1$ corresponde a una fisura de frente semicircular
- $\gamma = \frac{w}{h}$ Posición relativa en el frente de fisura

En el análisis realizado se han considerado los siguientes valores de los parámetros:

- **Profundidad relativa de la fisura α .** Se han considerado seis profundidades diferentes, $\alpha = 0.1; 0.2; 0.25; 0.3; 0.4; 0.5$ (ver figura 3.2).
- **Factor de forma de la fisura β .** Se han considerado cinco valores de β , desde 0 hasta 1 en intervalos de 0.25 (ver figura 3.2).

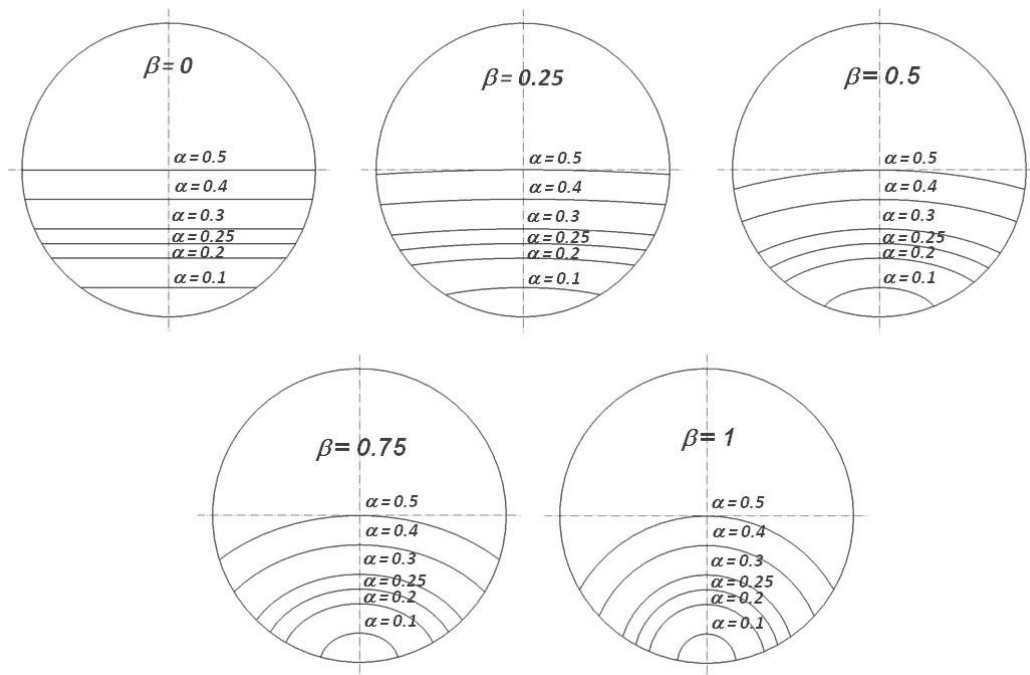


Figura 3.2: Variación de la profundidad relativa (α) y del factor de forma (β) de la fisura

- **Posición relativa en el frente de la fisura γ .** Se han considerado once valores de γ , desde -0.83 hasta 0.83 en intervalos de 0.16 (ver figura 3.3).

Los puntos situados en la superficie del eje, correspondientes a $\gamma=1$ y $\gamma=-1$ no se tuvieron en cuenta en el cálculo del FIT, debido a que el orden de la singularidad en este punto exterior podría no ser igual a $-1/2$ [90, 43, 39, 62].

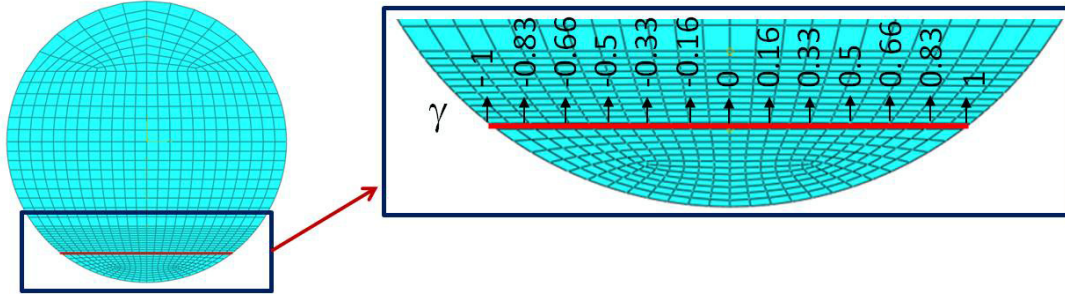


Figura 3.3: Posiciones en el frente de la fisura γ

- **Ángulo de giro del eje θ .** Se ha analizado el problema en 72 ángulos de giro, desde 0 hasta 2π , en intervalos de $\frac{2\pi}{72}$, que se corresponden con incrementos de 5° . Se ha considerado este incremento tras estudios preliminares, siendo este valor el que permite abordar el estudio óptimo del FIT.

En la figura 3.4 se pueden ver algunas de las posiciones angulares consideradas en el estudio.

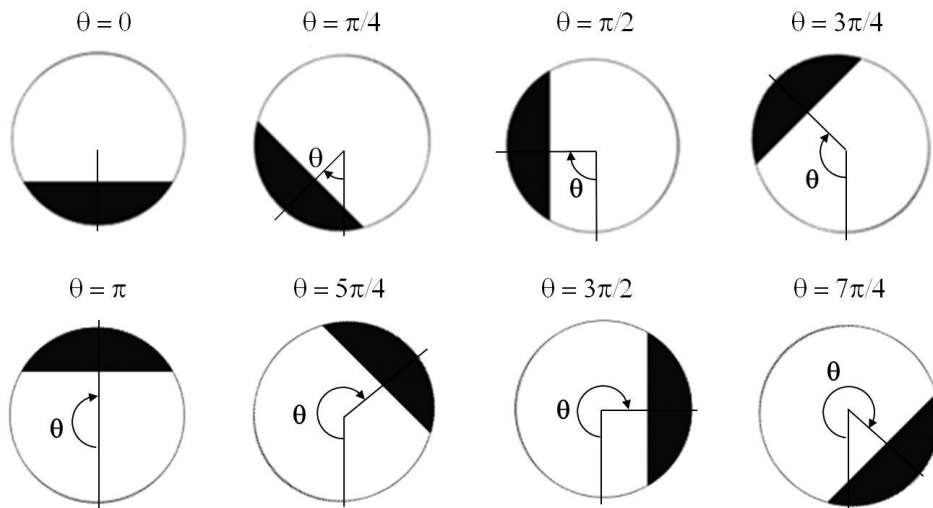


Figura 3.4: Posiciones angulares utilizadas en el estudio

Así pues, teniendo en cuenta la combinación de los parámetros α , β y θ , resultan un total de 2160 casos diferentes.

3.2 Modelo numérico

La resolución numérica del problema que se plantea se ha llevado a cabo mediante la versión 6.13 del Código comercial ABAQUS [91]. A continuación se describe el modelo numérico tridimensional que se ha empleado para la resolución del problema que parte del modelo geométrico planteado en el apartado anterior.

3.2.1 Cargas y condiciones de apoyo

El modelo geométrico se ha sometido a un estado de cargas dado por dos cargas puntuales simétricas de 100N, que se aplican a una distancia $d=L/4=225\text{ mm}$ de los extremos del eje, con unas condiciones de apoyo en cada uno de los dos extremos de la barra en las que se impiden los desplazamientos según los ejes radiales y se permiten el resto de los desplazamientos y los giros.

3.2.2 Contactos entre superficies

La simulación de la fisura se ha realizado mediante la consideración de dos tramos de eje y, con el fin de garantizar la unión entre los mismos, se ha establecido una interacción entre las superficies que constituyen la parte intacta de la sección fisurada. El detalle de esta unión se puede observar en la figura 3.5. La zona verde se corresponde con la sección que permanece intacta.

La zona fisurada se ha definido mediante un contacto entre las dos superficies correspondientes a las caras libres de la fisura, para evitar que cuando la misma se cierre el material de uno de los lados del eje penetre en el otro. El contacto entre ambas superficies está caracterizado, por una parte, por el comportamiento tangencial, con coeficiente de rozamiento infinito 'Rough friction' [91] y, por otra, por el comportamiento normal, para el que se ha elegido el modelo 'Hard Contact' [91]. Este modelo permite que las superficies no transmitan presión de contacto

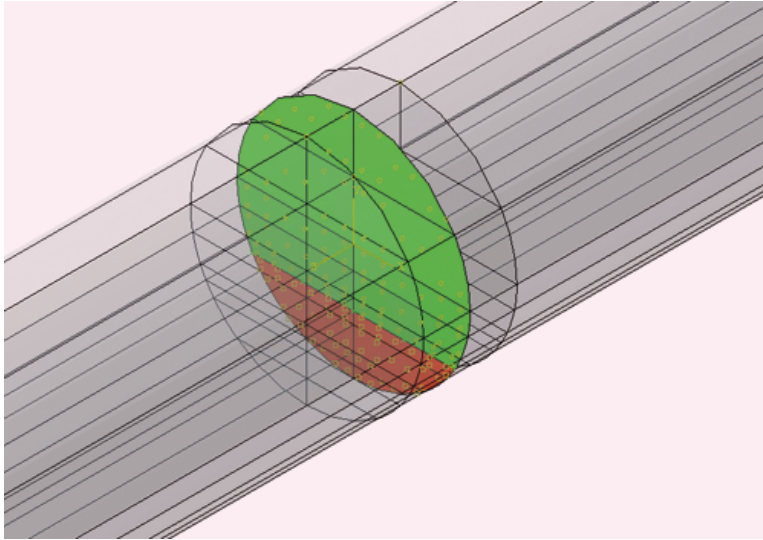


Figura 3.5: Detalle de los contactos en la zona intacta y en la zona fisurada

a menos que los nodos de una de las superficies estén en contacto con los de la otra, además, admite la separación de las superficies después del contacto. En la figura 3.5 se puede observar el detalle del contacto entre las dos superficies de la fisura. La zona roja se corresponde con la sección fisurada.

3.2.3 Mallado

El eje ha sido discretizado mediante elementos hexaédricos estructurados de integración reducida, C3D8R [91]. Debido a los fuertes gradientes de tensiones y deformaciones en el extremo de la fisura, en esta zona se ha utilizado mayor densidad de malla que en el resto del eje. La malla del eje comprende aproximadamente 220000 elementos y 235000 nodos. En la figuras 3.6 y 3.7 se puede observar un ejemplo de la malla utilizada en las vistas transversal y longitudinal, respectivamente.

Para determinar el tamaño óptimo de la malla, se ha realizado un análisis de sensibilidad hasta observar la convergencia de los resultados.

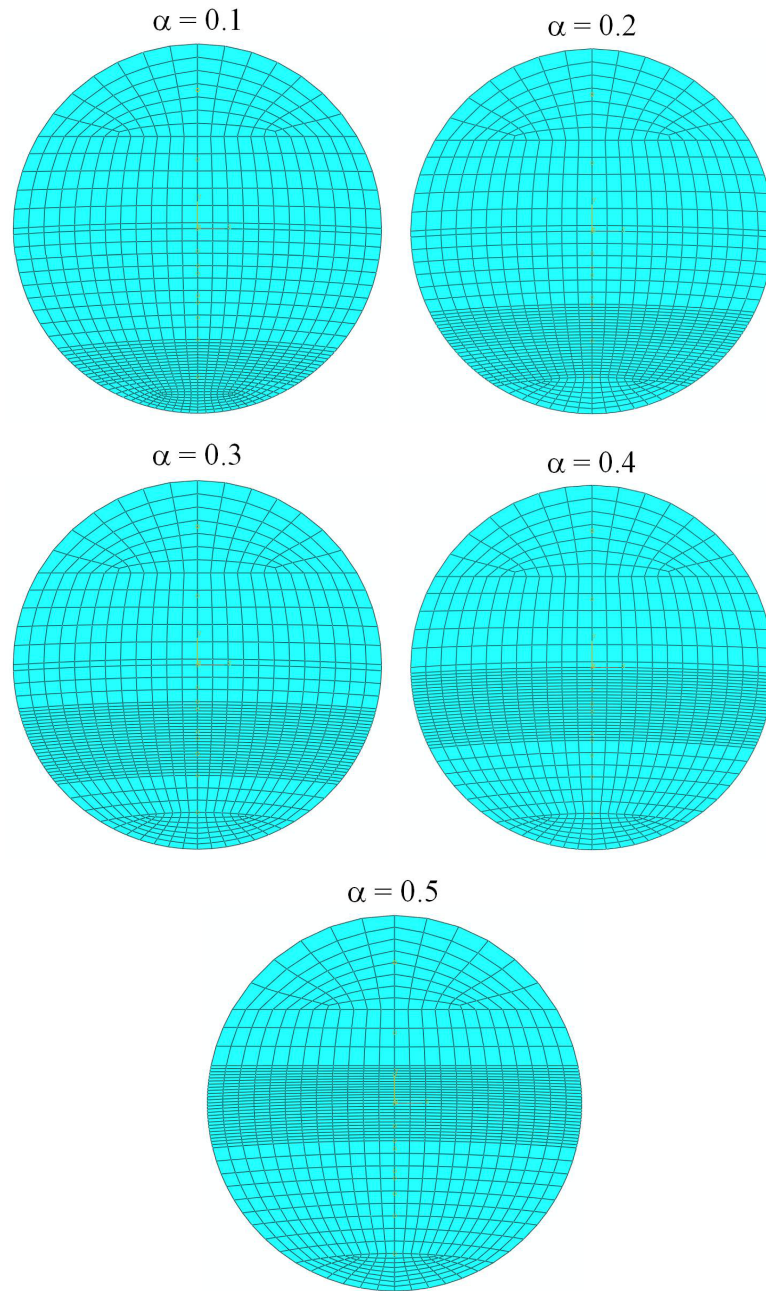


Figura 3.6: Detalle de la malla en la sección fisurada para el caso $\beta = 0.25$

3.2.4 Cálculo del FIT

El código comercial ABAQUS [91] incluye un módulo específico para el análisis de la fractura y en particular para el cálculo del FIT. Dicho módulo, denominado '*crack*', permite, por un lado, definir el frente de la fisura y la dirección de pro-

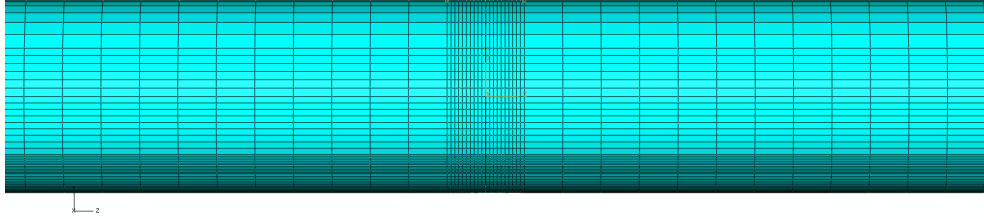


Figura 3.7: Detalle de la malla en la sección fisurada en la dirección longitudinal

pagación de la misma y, por otro, calcular el FIT en cada punto γ del frente. El código requiere la definición del número de contornos en los que evaluar el FIT mediante el cálculo interno de la integral J [21]. Se ha evaluado el número de contornos adecuado para la obtención del FIT, alcanzándose la convergencia de resultados con cinco contornos.

3.3 Análisis de resultados

Se han obtenido, de acuerdo con los apartados anteriores, los resultados correspondientes al FIT de todos los casos considerados. En la figura 3.8 se muestran los valores del FIT adimensional según la ecuación 2.3, F_I , para una profundidad de fisura $\alpha = 0,25$, un factor de forma $\beta = 0$ y tres posiciones angulares ($\theta = 0$, $\frac{\pi}{2}$ y π) en las que la fisura se encuentra, respectivamente, completamente abierta, parcialmente abierta y completamente cerrada.

Se observa que cuando la fisura se encuentra completamente abierta todos los puntos del frente de la fisura tienen valores del FIT positivos, cuando comienza a cerrarse aparecen valores negativos, y cuando la fisura se encuentra completamente cerrada todos los valores del FIT son menores que cero. El cambio de signo indica el punto del frente en el que la fisura comienza a cerrarse. Cuando

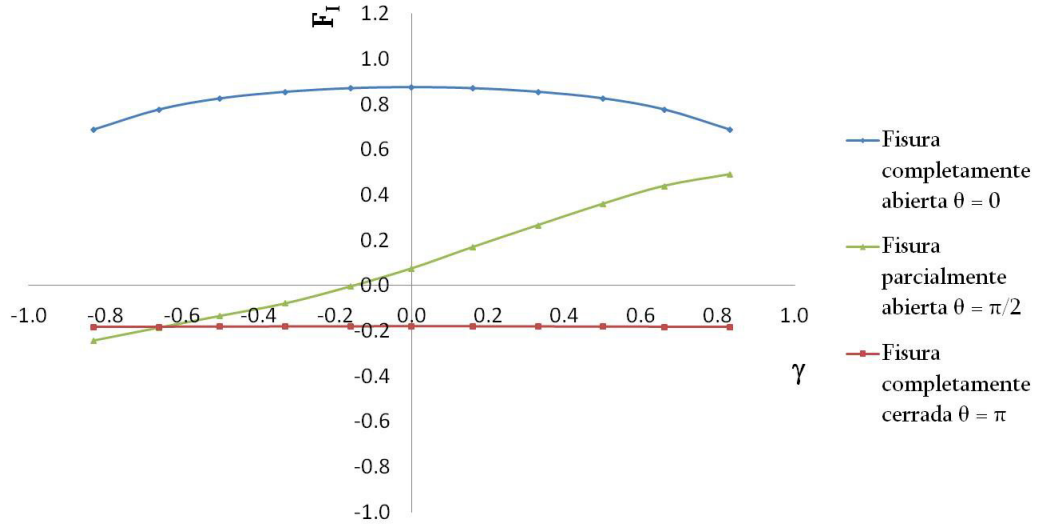


Figura 3.8: FIT adimensional para $\alpha = 0.25$ y $\beta = 0$ para los distintos valores de γ

la sección fisurada se encuentra en compresión, la fisura estará cerrada y, por tanto, el estado tensional será similar al del eje intacto, en estas condiciones el FIT adimensional, F_I , debería ser nulo.

3.4 Obtención del FIT a partir de los desplazamientos

Con el fin de comprobar la validez de los resultados del FIT obtenidos mediante el modelo de fractura de ABAQUS, se ha obtenido el FIT a partir de los desplazamientos relativos de los puntos de las caras de la fisura (CTOD) [16]. Este parámetro proporciona una medida del tamaño de la apertura del frente de la fisura y se puede expresar como (ver figura 3.9):

$$CTOD = 2u_z \quad (3.1)$$

donde u_z son los desplazamientos en dirección z en el fondo de una fisura en modo I y están relacionados con el FIT mediante la expresión:

$$u_z = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\phi}{2} \left(k + 1 - \cos^2 \frac{\phi}{2} \right) \quad (3.2)$$

donde $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ y $k = 3 - 4\nu$ en condiciones de deformación plana.

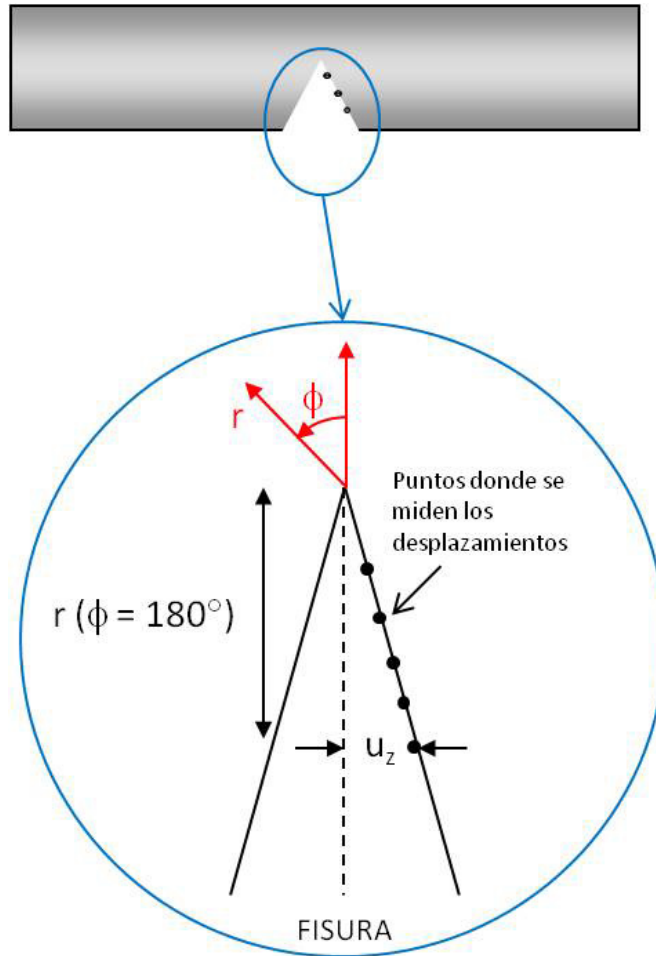


Figura 3.9: Detalle de los desplazamientos en la fisura

Por ejemplo, para un ángulo $\phi = 180^\circ$ K_I toma el valor:

$$K_I = \frac{2\mu \cdot \sqrt{2\pi}}{(3 - 4\nu + 1)} \cdot \frac{u_z}{\sqrt{r}} \quad (3.3)$$

En concreto, como muestra del cálculo del FIT a partir de los desplazamientos, se ha elegido el caso de frente recto $\beta = 0$, profundidad $\alpha = 0,25$ y posición angular $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Se han obtenido los desplazamientos u_z en puntos situados a diferentes distancias en la dirección r , medidas desde el frente de fisura, para cada γ (figura 3.10). A la vista de la expresión 3.3, el cálculo del FIT requiere conocer el valor de $\frac{u_z}{\sqrt{r}}$, que se ha calculado para cada uno de los casos de γ (ver figura 3.11). Se han seleccionado los cinco primeros puntos de acuerdo con los cinco contornos elegidos en el cálculo directo del FIT.

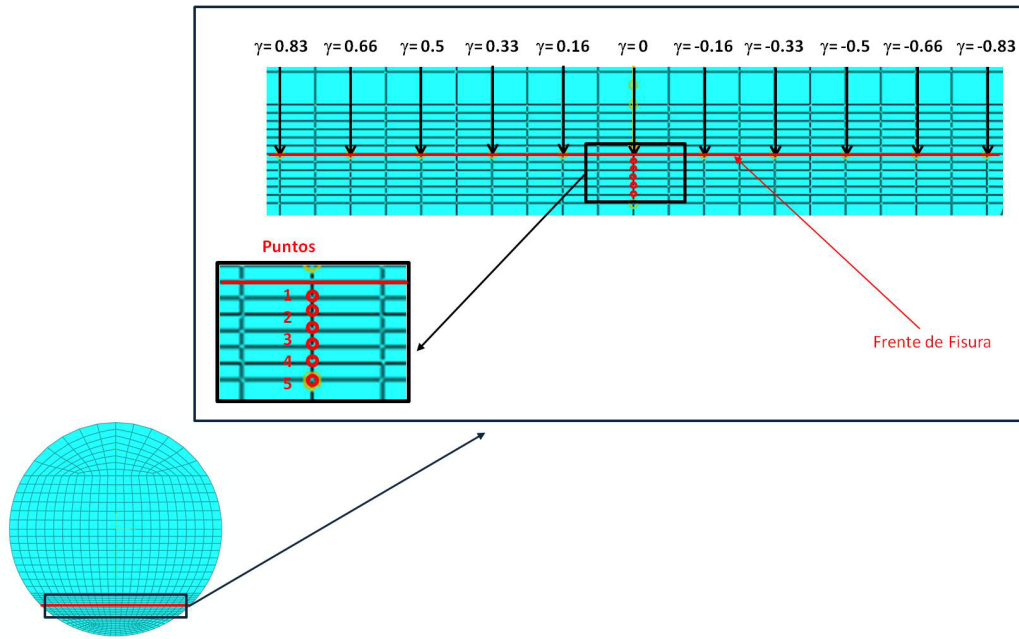


Figura 3.10: Diferentes puntos sobre los que se miden los desplazamientos para $\gamma = 0$

Con los resultados obtenidos se llega a las expresiones que relacionan los desplazamientos u_z con \sqrt{r} para cada posición en el frente (ver tabla 3.1), que permiten calcular el FIT mediante la ecuación 3.3.

En la figura 3.12 se muestran los resultados del FIT adimensional F_I obtenidos a partir de los desplazamientos u_z de las caras de la fisura junto con los resultados del FIT obtenidos directamente con el módulo 'crack'. Se observa una buena correlación entre ambos cuando la fisura se encuentra abierta, habiéndose constatado las mayores diferencias, del orden del 3%, en la periferia del eje.

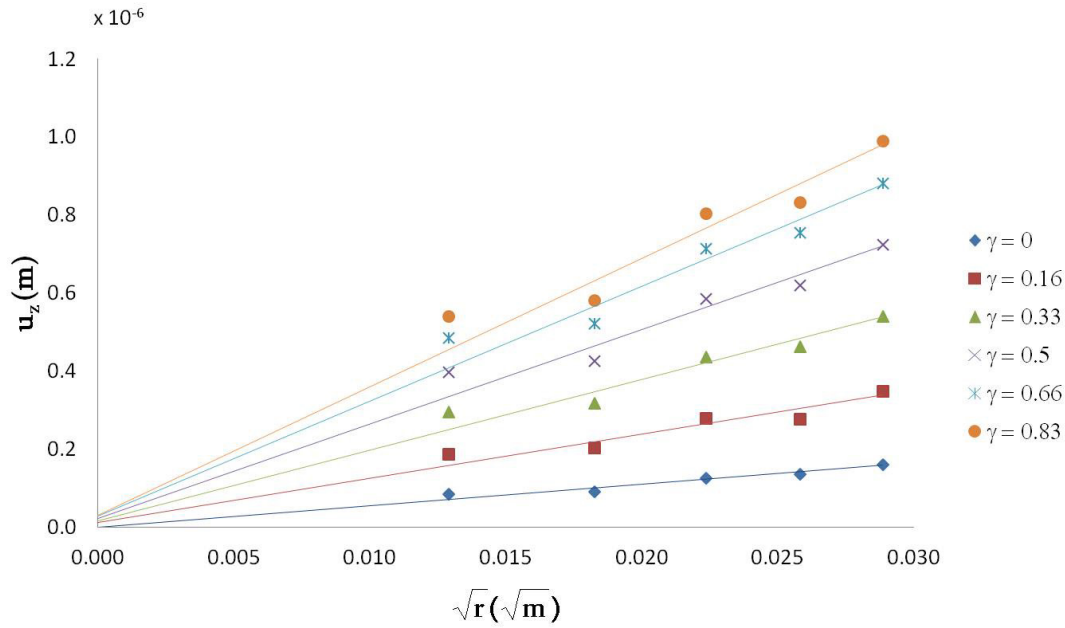


Figura 3.11: Desplazamientos u_z

Tabla 3.1: Expresiones obtenidas para cada posición relativa en el frente γ

γ	R^2	Expresión
0	0,9784	$u_z = 5,5 \cdot 10^{-6} \sqrt{r}$
0,16	0,9663	$u_z = 1,2 \cdot 10^{-5} \sqrt{r}$
0,33	0,9774	$u_z = 1,9 \cdot 10^{-5} \sqrt{r}$
0,5	0,9767	$u_z = 2,5 \cdot 10^{-5} \sqrt{r}$
0,66	0,9762	$u_z = 3,1 \cdot 10^{-5} \sqrt{r}$
0,83	0,9744	$u_z = 3,4 \cdot 10^{-5} \sqrt{r}$

También se observa que cuando la fisura está cerrada los resultados del FIT obtenidos a partir de los desplazamientos son nulos, como corresponde al eje intacto, mientras que los valores del FIT obtenidos mediante el módulo 'crack' son negativos.

Otros casos analizados, distintos de $\beta = 0$, $\alpha = 0.25$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$ conducen a resultados similares. Se puede concluir que el módulo 'crack' solo proporciona valores fiables del FIT mientras la fisura está abierta. De acuerdo con lo anterior, cuando la fisura se cierra el FIT debe ser cero. Como consecuencia de ello, no se pueden utilizar los valores del FIT proporcionados directamente por el módulo 'crack' en el caso de fisura cerrada.

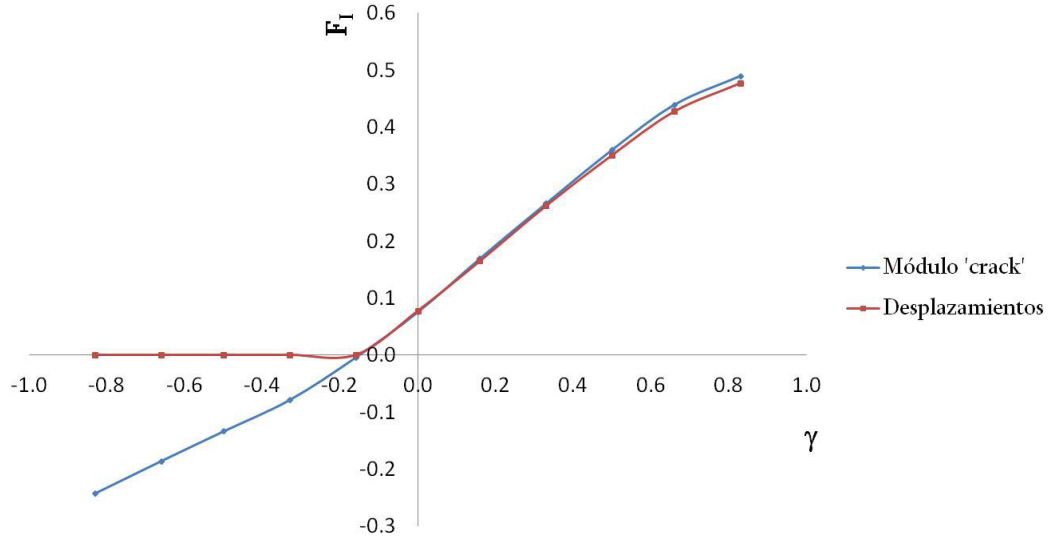


Figura 3.12: Comparación del FIT adimensional obtenido mediante el módulo 'crack' y el obtenido mediante desplazamientos para $\beta = 0$, $\alpha = 0.25$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$

3.5 Validación del modelo

Los resultados del FIT obtenidos se han comparado con los mostrados por otros autores. En primer lugar, se han contrastado, para el caso de fisura completamente abierta (sin giro), con los del modelo de Shin y Cai [9]. En segundo lugar, la validación se ha realizado con el modelo de Carpinteri [6], para el caso de fisura parcialmente abierta.

3.5.1 Fisura completamente abierta

En el trabajo de Shin y Cai [9] se realizó un estudio numérico del FIT a lo largo del frente de la fisura en función de la profundidad y de la forma de la misma, y de la posición relativa en el frente; y a partir de los resultados obtenidos numéricamente se llegó a una expresión para el cálculo del FIT.

En las figuras 3.13 a 3.17 se muestra el F_I obtenido mediante el modelo de Shin y Cai [9] y se compara con el resultado del modelo numérico desarrollado, denominado 'Modelo Tesis'. Se puede observar que los resultados que se obtienen son muy similares.

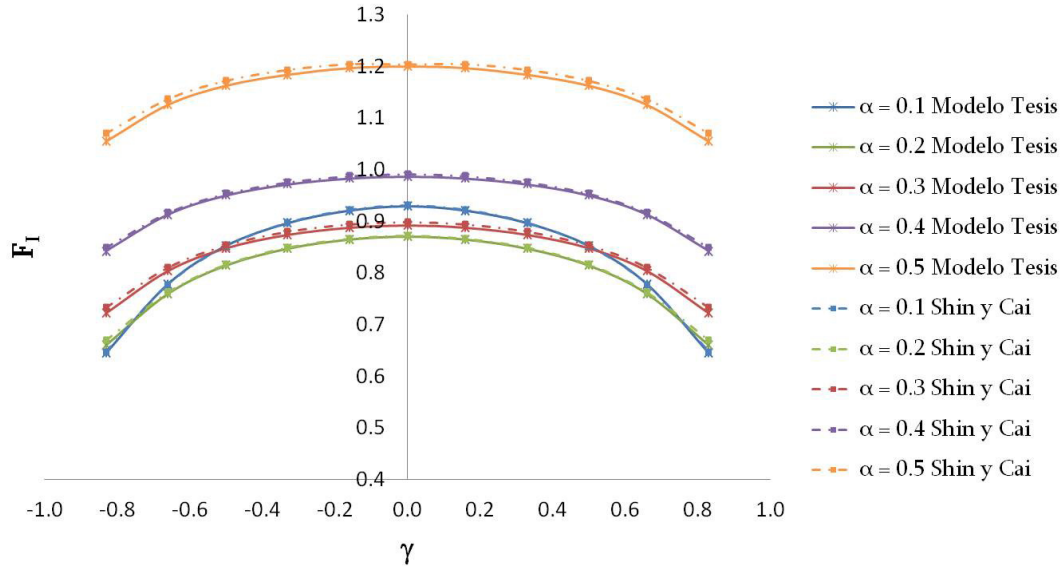


Figura 3.13: Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Shin y Cai [9] para $\beta = 0$ y distintos valores de α

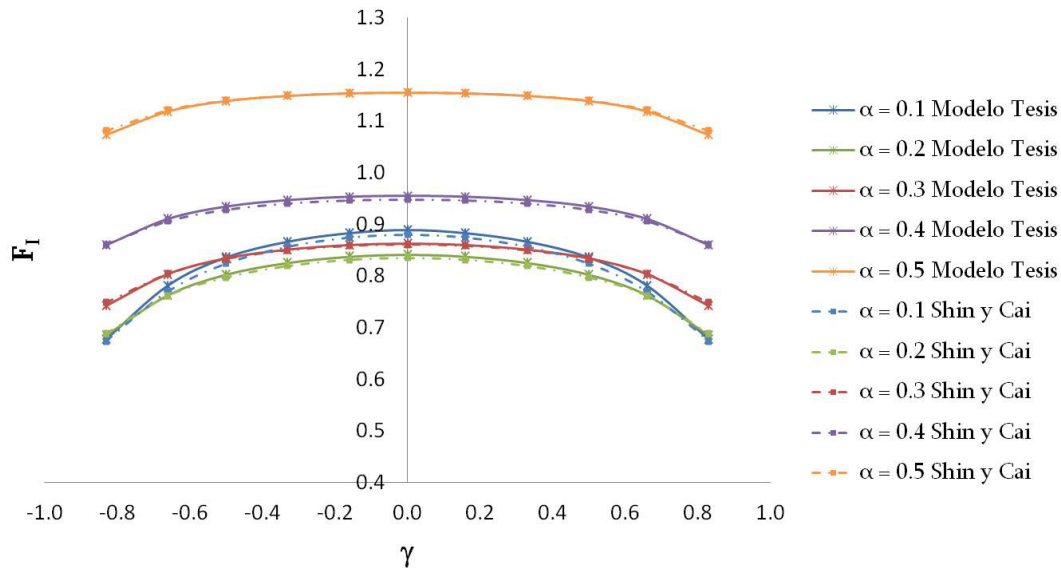


Figura 3.14: Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Shin y Cai [9] para $\beta = 0,25$ y distintos valores de α

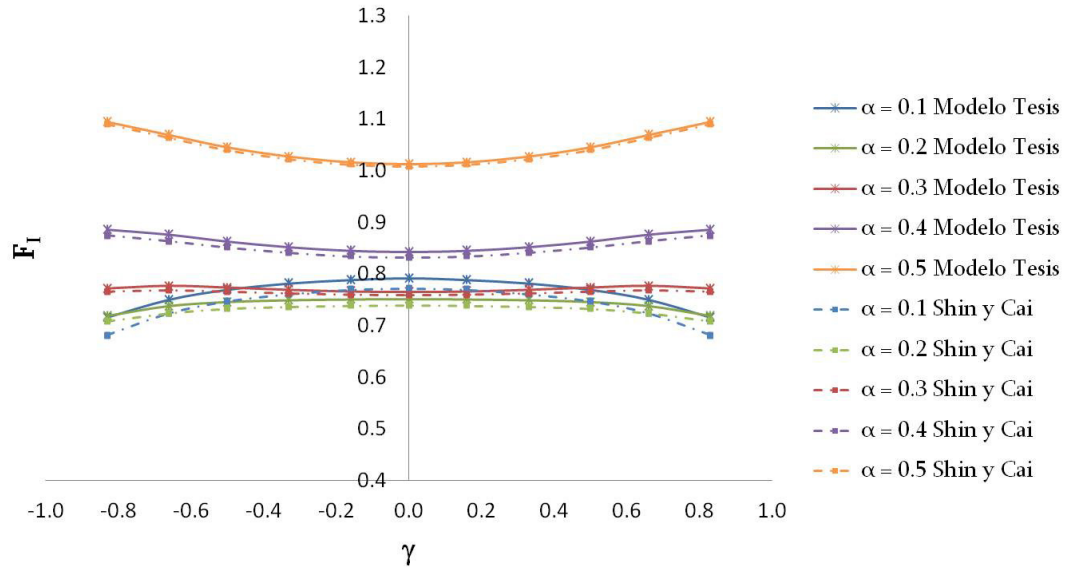


Figura 3.15: Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Shin y Cai [9] para $\beta = 0,5$ y distintos valores de α

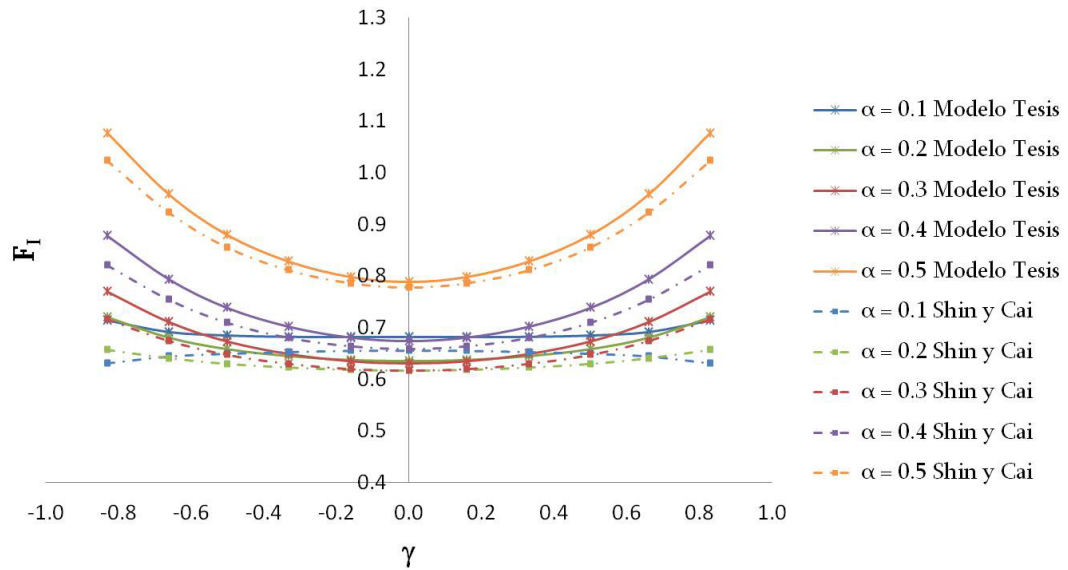


Figura 3.16: Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Shin y Cai [9] para $\beta = 0,75$ y distintos valores de α

Para $\beta = 0$, $\beta = 0,25$ y $\beta = 0,5$ los resultados prácticamente coinciden, con una diferencia máxima que se encuentra siempre por debajo del 5 %. Para $\beta = 0,75$ y $\beta = 1$ las discrepancias son ligeramente superiores, no obstante, para cada tamaño de fisura, ambas curvas siguen la misma tendencia.

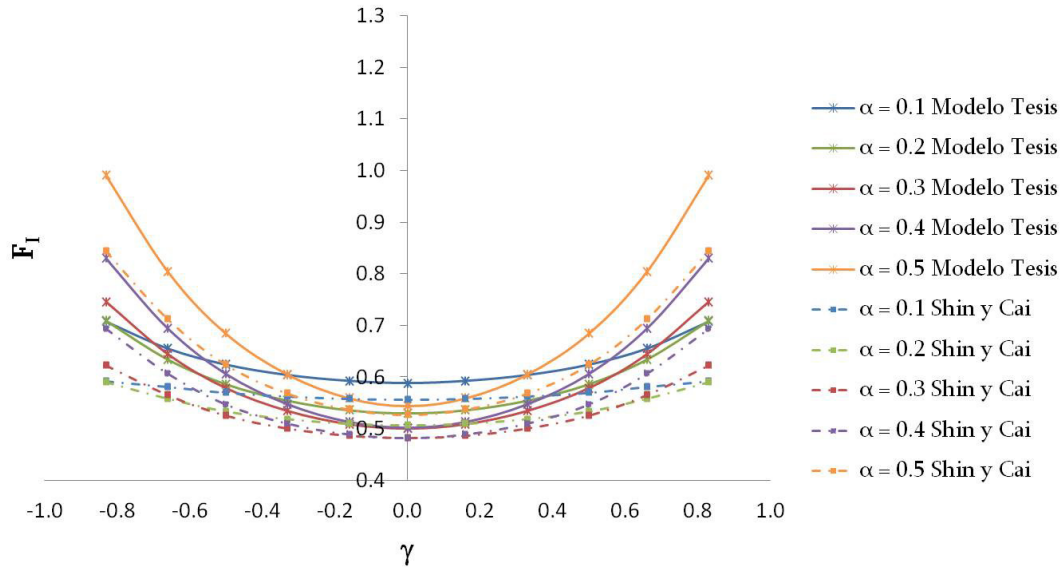


Figura 3.17: Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Shin y Cai [9] para $\beta = 1$ y distintos valores de α

3.5.2 Fisura parcialmente abierta

En el trabajo de Carpinteri [6] se realizó un estudio numérico del FIT a lo largo del frente de la fisura para las posiciones angulares $\theta = 0$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$, y se extendieron los resultados a un giro completo del eje.

En las figuras 3.18 a 3.21 se muestra el F_I obtenido mediante el modelo de Carpinteri [6] y se compara con los resultados del modelo numérico desarrollado para una posición angular de $\theta = \frac{3\pi}{2}$ y distintos valores de α y β .

Cabe destacar que en el modelo propuesto por Carpinteri [6] los valores del FIT adimensional, cuando la fisura está cerrada, son iguales en valor absoluto a los valores del FIT adimensional cuando la fisura está abierta, pero de signo contrario. A partir de las comprobaciones realizadas, se considera que esto puede deberse a que en este estudio no se indica que se hayan evitado las penetraciones en el cierre de la fisura. Cuando la fisura está abierta, para las posiciones relativas cercanas al centro de la fisura, existe una pequeña diferencia entre los resultados de los dos modelos en todas las profundidades. Esta diferencia se debe a que Carpinteri [6], al igual que otros autores [10], consideró que para la posición

angular $\theta = \frac{3\pi}{2}$, exactamente la mitad de la fisura se encuentra abierta y, por el contrario, en el estudio realizado, al igual que en otros modelos [4], se observa que para esa posición angular algo más de la mitad de la fisura está abierta.

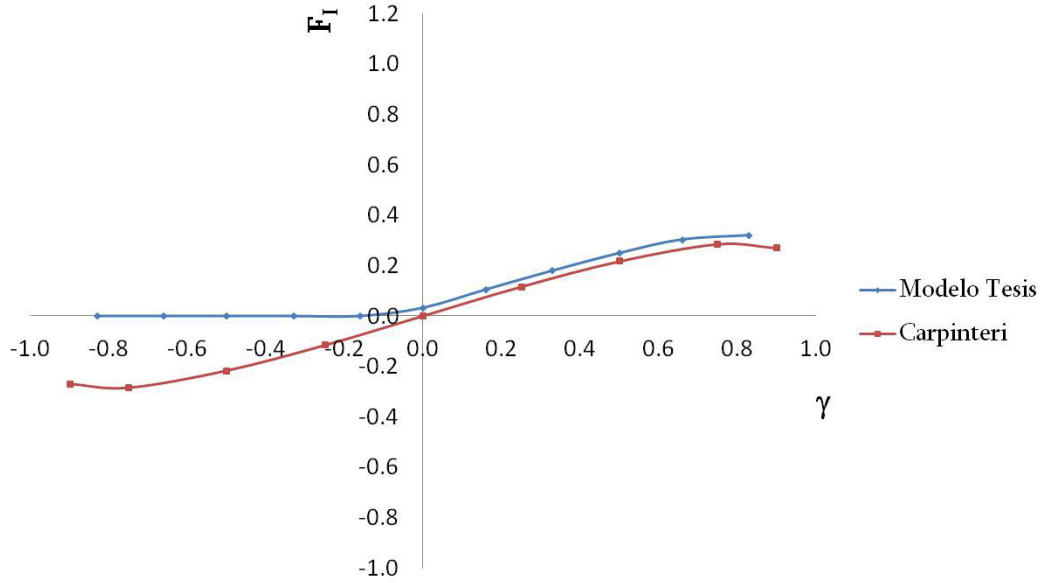


Figura 3.18: Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Carpinteri [6] para $\beta = 0$, $\alpha = 0,1$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$

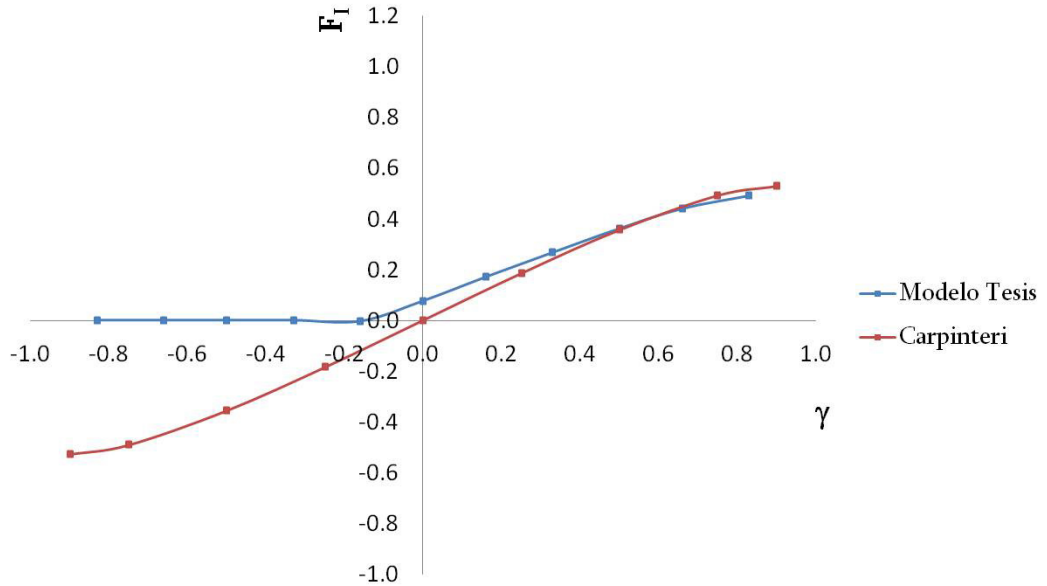


Figura 3.19: Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Carpinteri [6] para $\beta = 0$, $\alpha = 0,25$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$

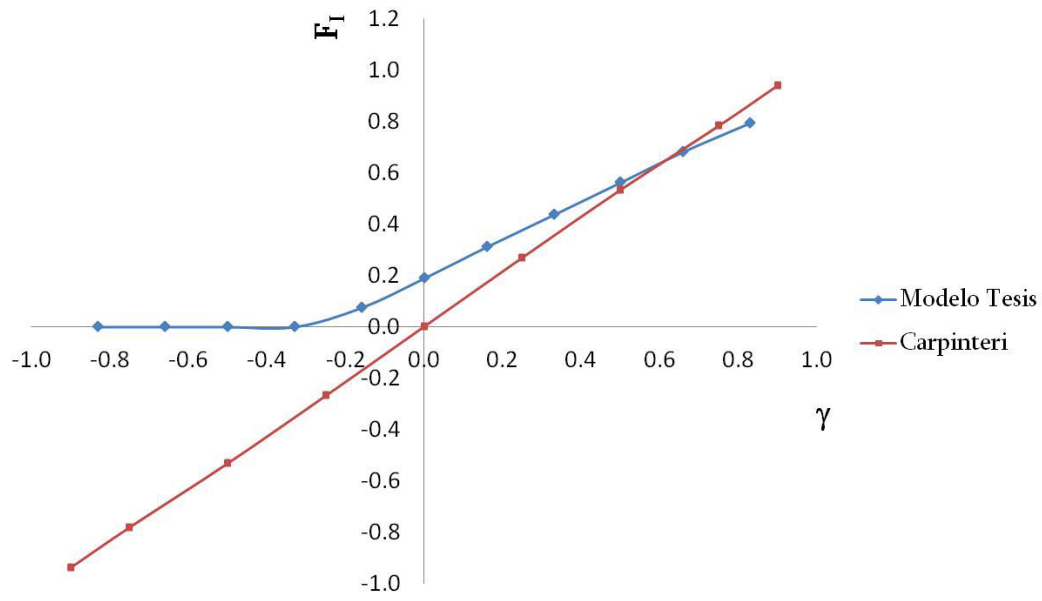


Figura 3.20: Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Carpinteri [6] para $\beta = 0$, $\alpha = 0,5$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$

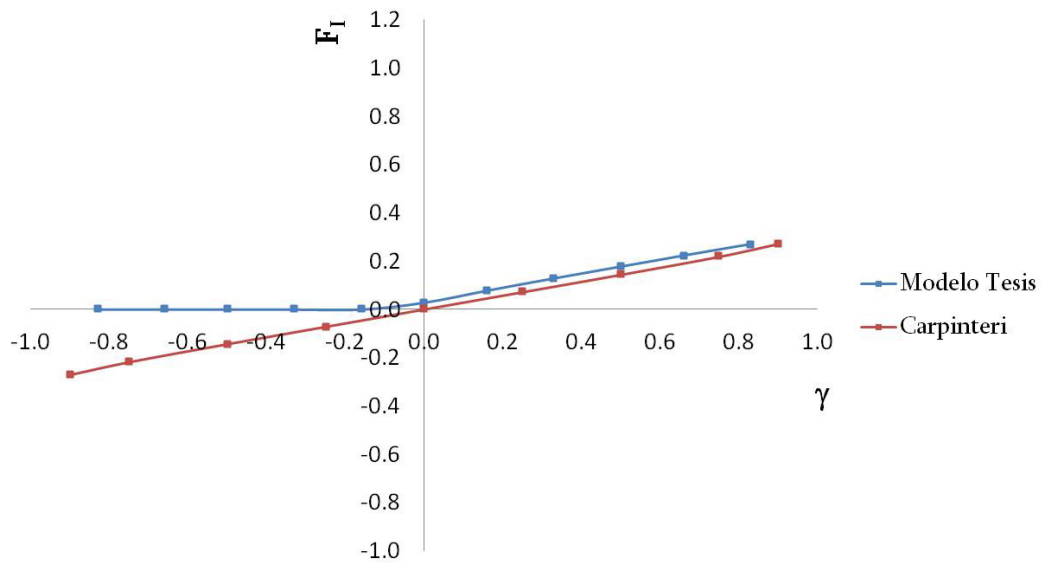


Figura 3.21: Comparación del FIT adimensional del 'Modelo Tesis' y el de Carpinteri [6] para $\beta = 1$, $\alpha = 0,3$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$

3.6 Resultados y discusión

En este apartado se discuten los resultados obtenidos en la simulación numérica. Se han obtenido dos tipos de resultados diferentes, los primeros están orientados a estudiar la apertura y cierre de la fisura a lo largo de un giro completo del eje, y los segundos se han utilizado para analizar la variación del FIT a lo largo del frente de la fisura durante el mismo periodo.

3.6.1 Estudio de la apertura y cierre

El estudio del mecanismo de apertura y cierre de la fisura tiene como objetivo determinar qué zona de la sección fisurada se encuentra abierta a lo largo del giro del eje, aspecto importante para la determinación posterior de una expresión del FIT en función del ángulo girado. En la figura 3.22 se puede ver un ejemplo de los resultados obtenidos para una fisura de profundidad $\alpha = 0,25$ y factor de forma $\beta = 0$, la zona blanca se corresponde con la porción de la sección que se encuentra cerrada para cada ángulo de giro. Los resultados son extensibles a otras profundidades y formas del frente.

Para cuantificar el grado de apertura, se ha medido a partir de estas imágenes, mediante métodos gráficos, el porcentaje de sección fisurada abierta respecto a la sección transversal del eje a lo largo de un giro completo. El mecanismo de apertura y cierre de la fisura ya ha sido utilizado por otros autores de manera analítica [10] o numérica [4]. En la figura 3.23, se puede observar la gran similitud de los resultados con el modelo numérico de Bachschmid et al. [4]. También se pueden apreciar las diferencias con respecto al modelo analítico de LCF utilizado por otros autores, entre ellos Darpe et al. [10].

La principal diferencia entre el 'Modelo Tesis' y el modelo de LCF [10] estriba en que este último considera que para una posición angular de $\frac{\pi}{4}$ la fisura está cerrada un cuarto, y para $\frac{\pi}{2}$ lo está la mitad, mientras que el primero, al igual que el modelo desarrollado por Bachschmid et al. [4], predice que en la posición

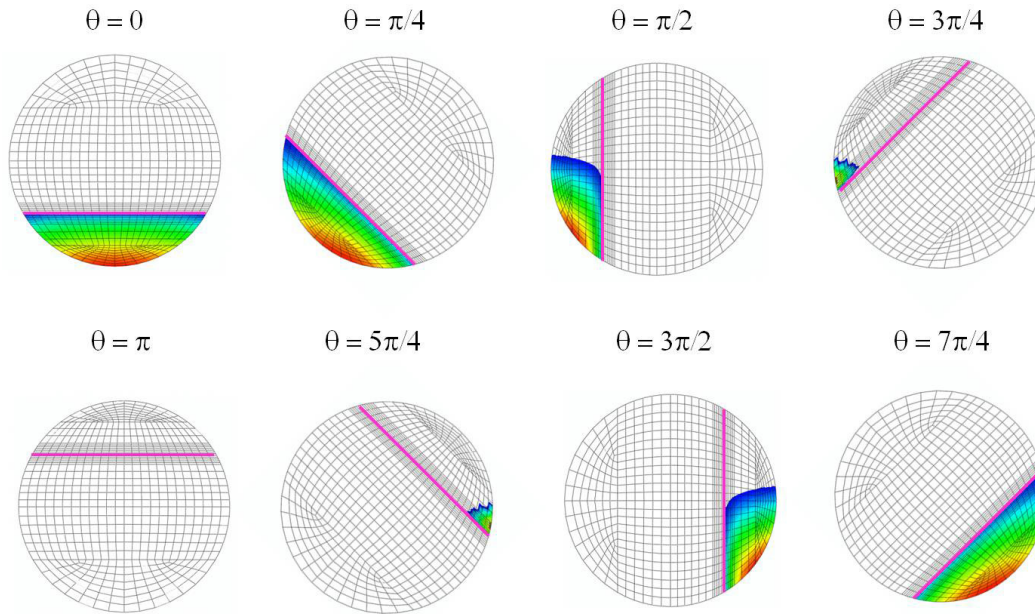


Figura 3.22: Apertura de la fisura (zona en color) para un eje con una fisura con $\alpha = 0,25$ y $\beta = 0$ en un giro completo

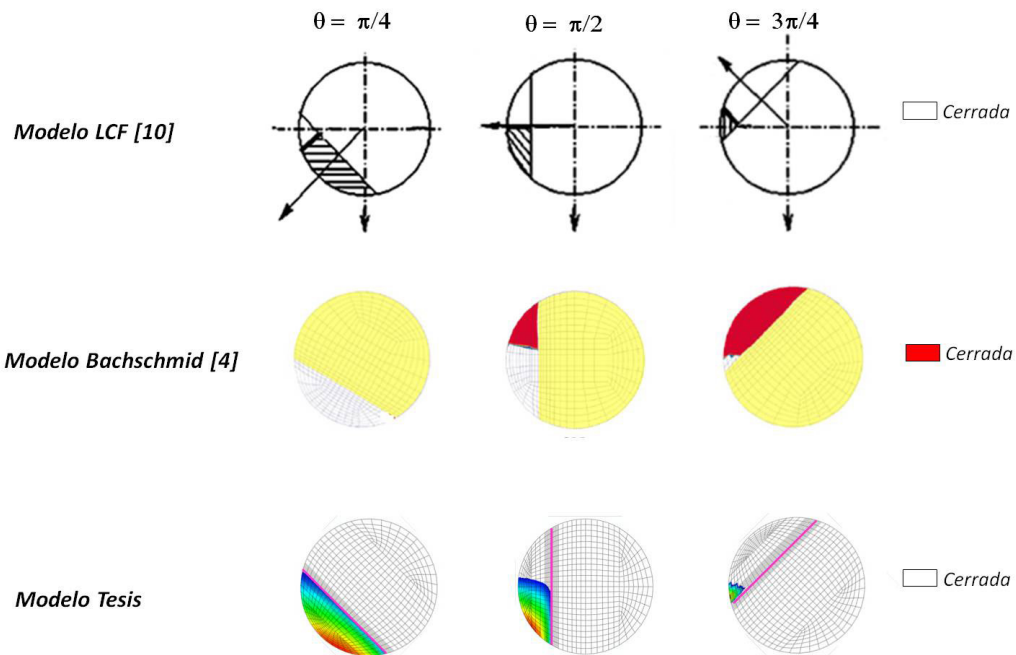


Figura 3.23: Apertura de la fisura para el modelo LCF [10], Bachschmid et al. [4] y en el modelo desarrollado

angular de $\frac{\pi}{4}$ la fisura tarda más en comenzar a cerrarse, y continúa completamente abierta, y en la posición angular de $\theta = \frac{\pi}{2}$ algo menos de la mitad de la fisura está cerrada.

Con el fin de analizar los resultados, se ha calculado el porcentaje de apertura de la fisura con la siguiente expresión:

$$\Lambda(\%) = \frac{A_0}{A_c} 100 \quad (3.4)$$

donde A_0 es el área fisurada abierta y A_c es el área de la sección transversal del eje.

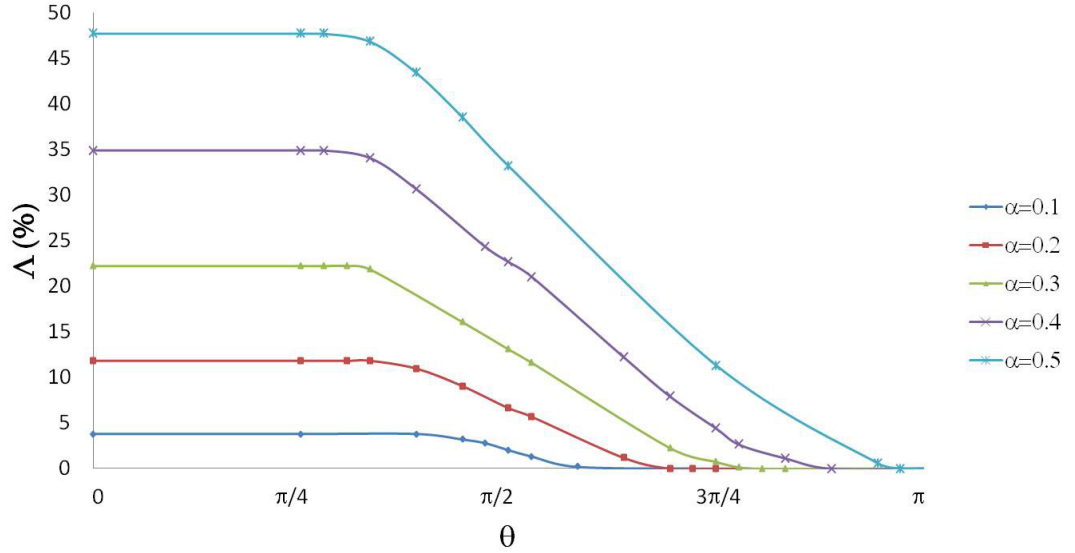


Figura 3.24: Porcentaje de apertura de la fisura respecto del área transversal a lo largo de medio giro para distintos valores de α y $\beta = 0$

En la figuras 3.24 y 3.25 se representan los valores del porcentaje de apertura obtenidos para $\beta = 0$, $\beta = 0,5$ y distintos valores de α , y en la figura 3.26 se muestran los mismos valores para $\alpha = 0,25$ y todos los casos de β . Dada la simetría de los resultados, en cada gráfica solo se muestran los valores correspondientes a medio giro (de 0 a π).

Se puede observar que para un mismo valor de β (ver figuras 3.24 y 3.25), la apertura de la fisura crece con la profundidad de la misma en todo el giro.

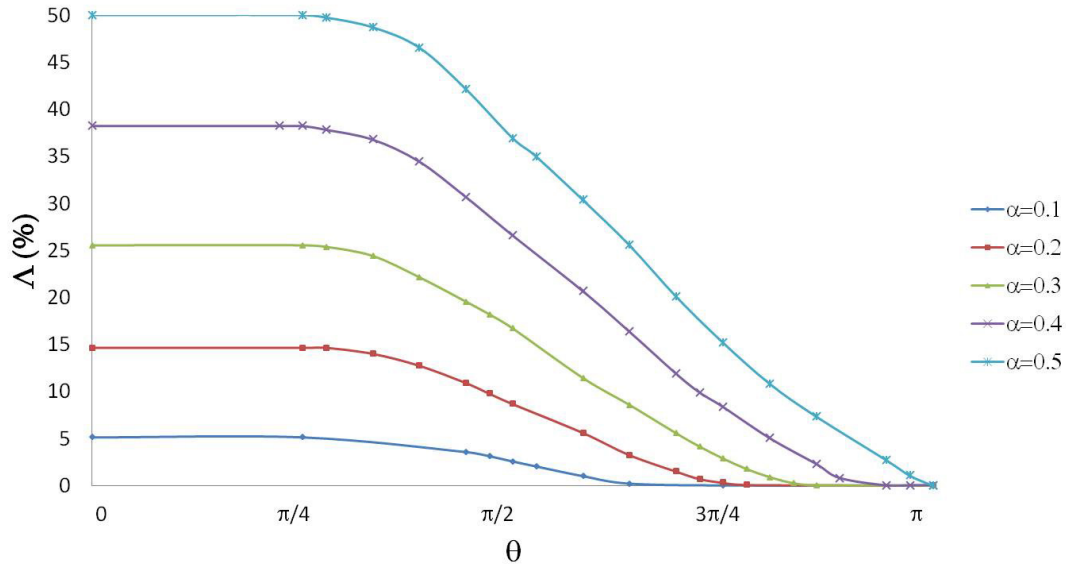


Figura 3.25: Porcentaje de apertura de la fisura respecto del área transversal a lo largo de medio giro para distintos valores de α y $\beta = 0,5$

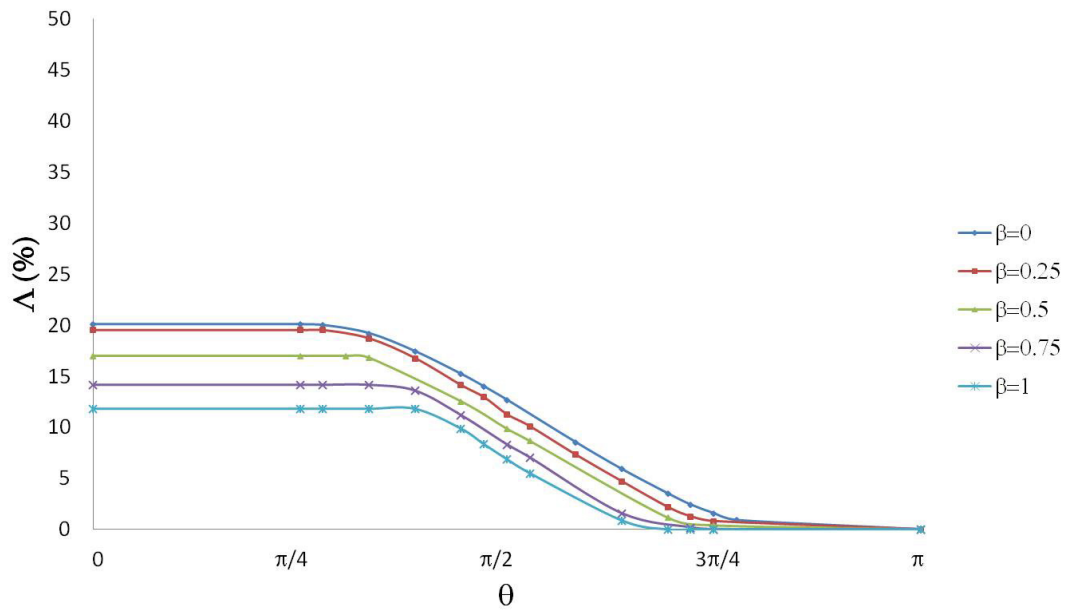


Figura 3.26: Porcentaje de apertura de la fisura respecto de la sección transversal total a lo largo de medio giro para todos los casos de β y $\alpha = 0,25$

También se observa que las fisuras pequeñas están cerradas durante más tiempo que las grandes.

Por otra parte, para un valor de α fijo, por ejemplo $\alpha = 0,25$ (figura 3.26), cuanto más recto es el frente mayor es la apertura para un mismo ángulo de giro y las fisuras más elípticas están más tiempo cerradas que las rectas.

3.6.2 Factor de Intensidad de Tensiones

En este apartado se muestran y analizan los resultados del Factor de Intensidad de Tensiones que se han obtenido mediante el módulo crack de ABAQUS para la parte abierta de la fisura, considerando, de acuerdo con las conclusiones alcanzadas en el apartado 3.4, la anulación de los valores del FIT cuando la fisura está cerrada.

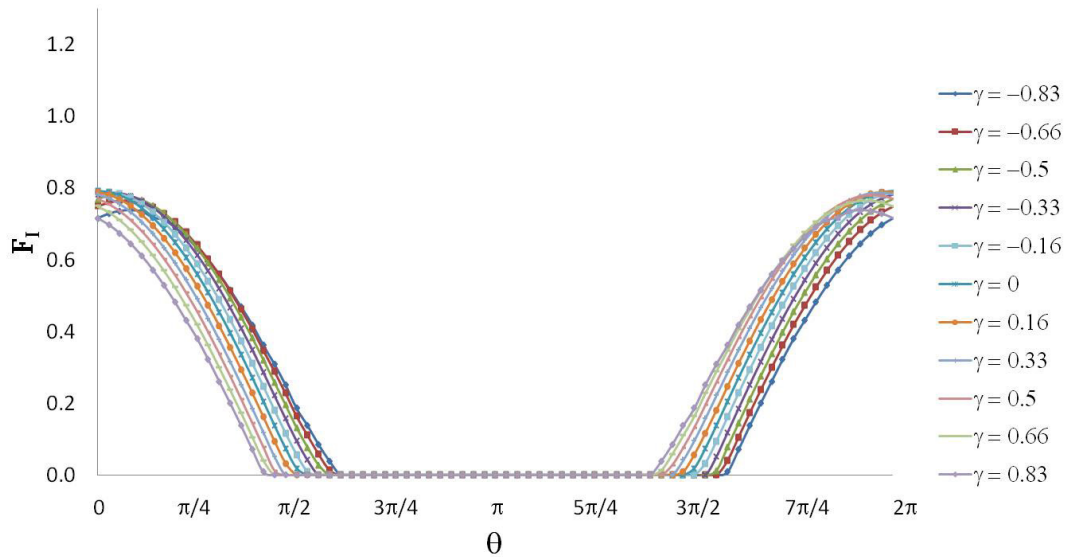


Figura 3.27: FIT adimensional a lo largo de un giro del eje para un factor de forma $\beta = 0,5$ y una profundidad $\alpha = 0,1$

En las figuras 3.27 a 3.31 se representa el valor del FIT adimensional F_I en función del ángulo de giro θ . Cada figura muestra, para un factor de forma dado β y una determinada profundidad α , los valores de F_I para cada posición relativa en el frente de fisura γ , es decir, en cada curva se representa la variación de F_I experimentada por un punto del frente a lo largo de un giro. Se han representado los casos correspondientes a $\beta = 0,5$ y diferentes casos de α . No obstante, las conclusiones se pueden extender al resto de profundidades y factores de forma.

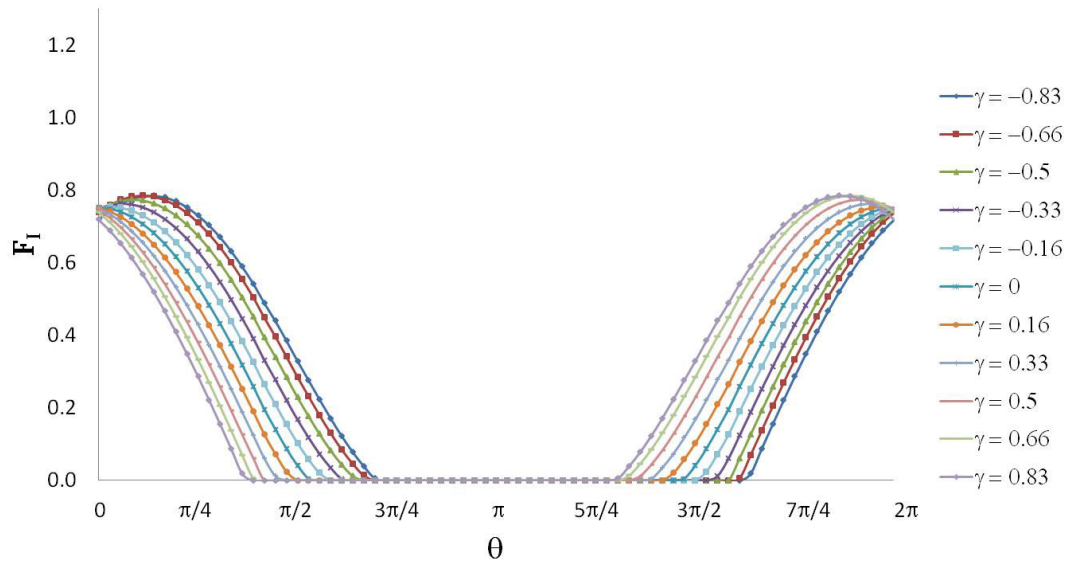


Figura 3.28: FIT adimensional a lo largo de un giro del eje para un factor de forma $\beta = 0,5$ y una profundidad $\alpha = 0,2$

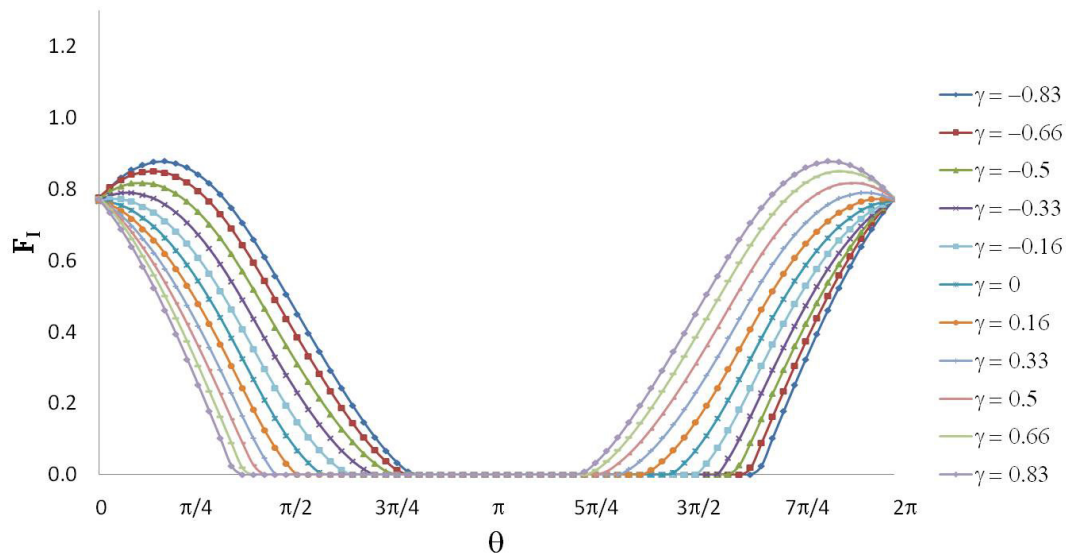


Figura 3.29: FIT adimensional a lo largo de un giro del eje para un factor de forma $\beta = 0,5$ y una profundidad $\alpha = 0,3$

A la vista de los resultados representados en las figuras, pueden obtenerse las siguientes consideraciones:

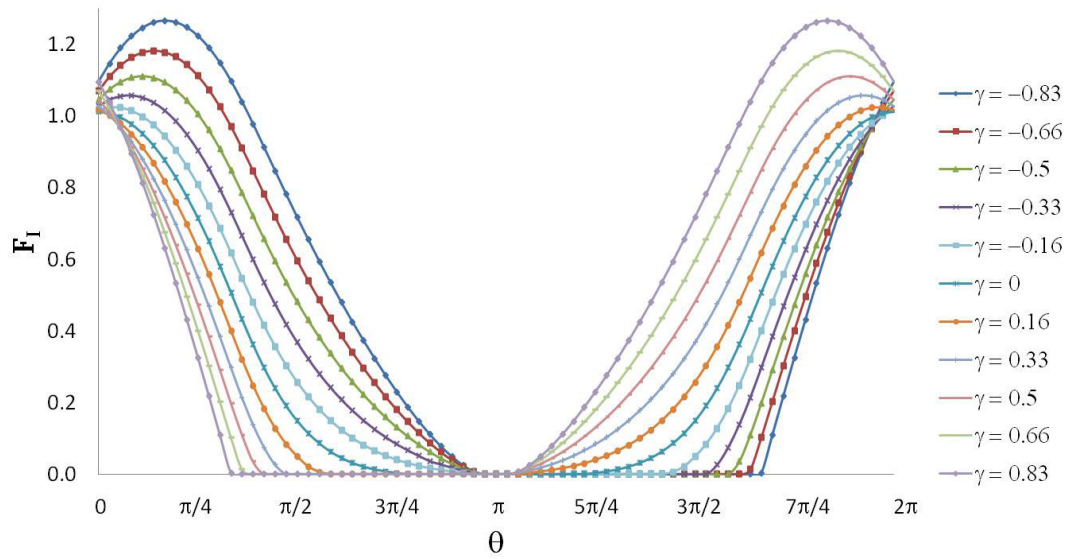


Figura 3.30: FIT adimensional a lo largo de un giro del eje para un factor de forma $\beta = 0,5$ y una profundidad $\alpha = 0,4$

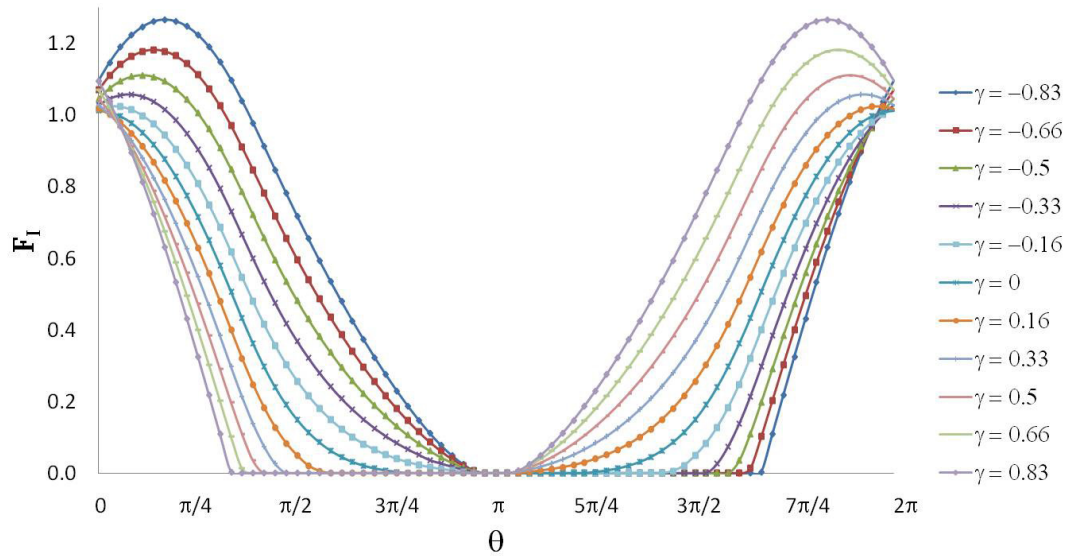


Figura 3.31: FIT adimensional a lo largo de un giro del eje para un factor de forma $\beta = 0,5$ y una profundidad $\alpha = 0,5$

- Cuando el eje gira la fisura se abre y se cierra con simetría. Por ejemplo, cuando el eje alcanza el ángulo de rotación $\theta = \frac{\pi}{2}$, el número de posiciones relativas en el frente con el FIT positivo es el mismo que cuando el eje alcanza el ángulo de rotación $\theta = \frac{3\pi}{2}$, por lo tanto, la cantidad de parte abierta es exactamente la misma (ver figura 3.32).

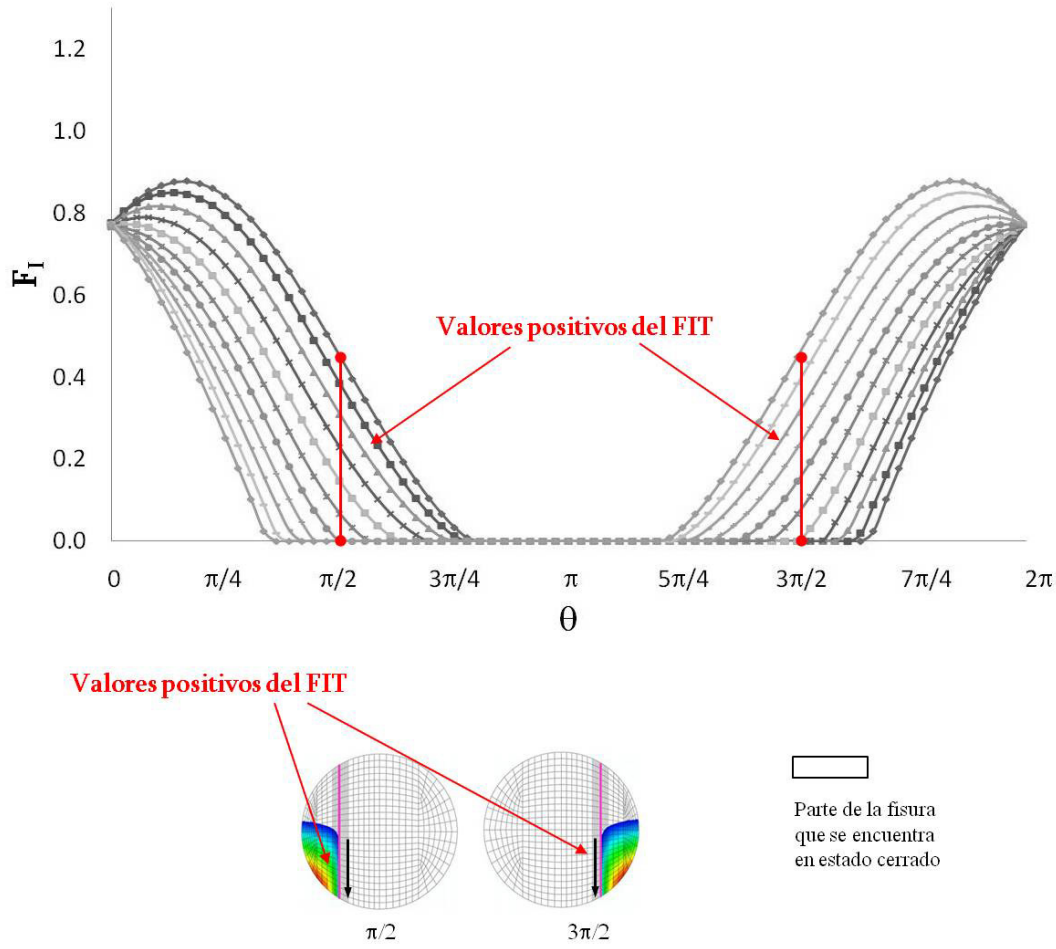


Figura 3.32: Apertura de la fisura con simetría

- Independientemente de la profundidad y del factor de forma elegidos, para un ángulo de rotación $\theta = 0$, el FIT es siempre positivo, lo que significa que la fisura se encuentra siempre abierta y, por el contrario, para un ángulo de rotación $\theta = \pi$, el FIT es siempre nulo, lo que significa que la fisura se encuentra completamente cerrada.
- El número de posiciones relativas en el frente con FIT nulo disminuye a medida que aumenta la profundidad de la fisura, por lo tanto, el tiempo de apertura de la fisura aumenta a medida que se incrementa la profundidad del defecto. Esto se puede observar en la figura 3.33, en la que se ha representado el valor del FIT adimensional para las posiciones relativas extremas $\gamma = -0,83$ y $\gamma = 0,83$, para un factor de forma dado $\beta = 0,25$ y una profundidad $\alpha = 0,3$.

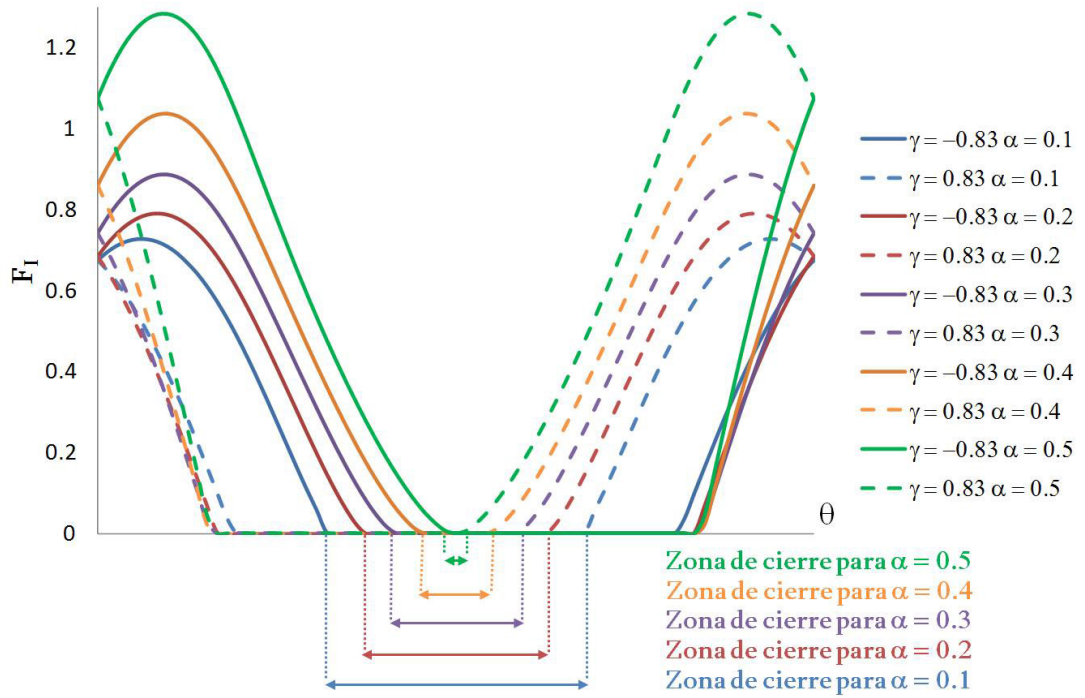


Figura 3.33: Valores nulos del FIT para las posiciones relativas extremas $\gamma = -0,83$ y $\gamma = 0,83$, para un factor de forma $\beta = 0,25$ y una profundidad $\alpha = 0,3$

Un dato crucial para posteriores desarrollos de esta Tesis es el ángulo de giro en el que la fisura se abre o se cierra. Por esta razón se realiza un estudio pormenorizado de posiciones angulares con incrementos de $\frac{2\pi}{72}$, correspondientes a 5° , ya que de esta manera se localiza con mayor exactitud los instantes de apertura y cierre de la misma. Por ejemplo, en una rotación completa del eje, una fisura de $\alpha = 0,1$ y frente semicircular $\beta = 1$ (ver figura 3.34) permanece completamente abierta entre los ángulos de rotación $\theta = 0$ y $\theta = 1,48$ y los ángulos $\theta = 4,88$ y $\theta = 2\pi$, que es inferior de la mitad de la rotación. La fisura se encuentra completamente cerrada para ángulos entre $\theta = 1,74$ y $\theta = 4,62$. En el resto de la rotación la fisura se encuentra parcialmente abierta. Por el contrario, una fisura de $\alpha = 0,5$ y frente recto $\beta = 0$ (ver figura 3.35), permanece completamente abierta entre los ángulos de rotación $\theta = 0$ y $\theta = 0,96$, y los ángulos $\theta = 5,32$ y $\theta = 2\pi$. La fisura se encuentra completamente cerrada para el ángulo $\theta = \pi$, permaneciendo parcialmente abierta el resto de la rotación.

En la tabla 3.2 se muestra el ángulo de giro en el que la fisura comienza a abrirse para cada uno de los casos estudiados. Se observa que este efecto se produce cuanto más recto es el frente y mayor es la profundidad.

Tabla 3.2: Ángulo de apertura de la fisura (rad) para los diferentes casos analizados

	$\beta = 0$	$\beta = 0,25$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,75$	$\beta = 1$
$\alpha = 0,1$	4,27	4,27	4,44	4,53	4,62
$\alpha = 0,2$	3,93	4,01	4,09	4,27	4,36
$\alpha = 0,3$	3,66	3,75	3,83	4,01	4,19
$\alpha = 0,4$	3,49	3,49	3,57	3,57	3,93
$\alpha = 0,5$	3,23	3,23	3,31	3,49	3,66

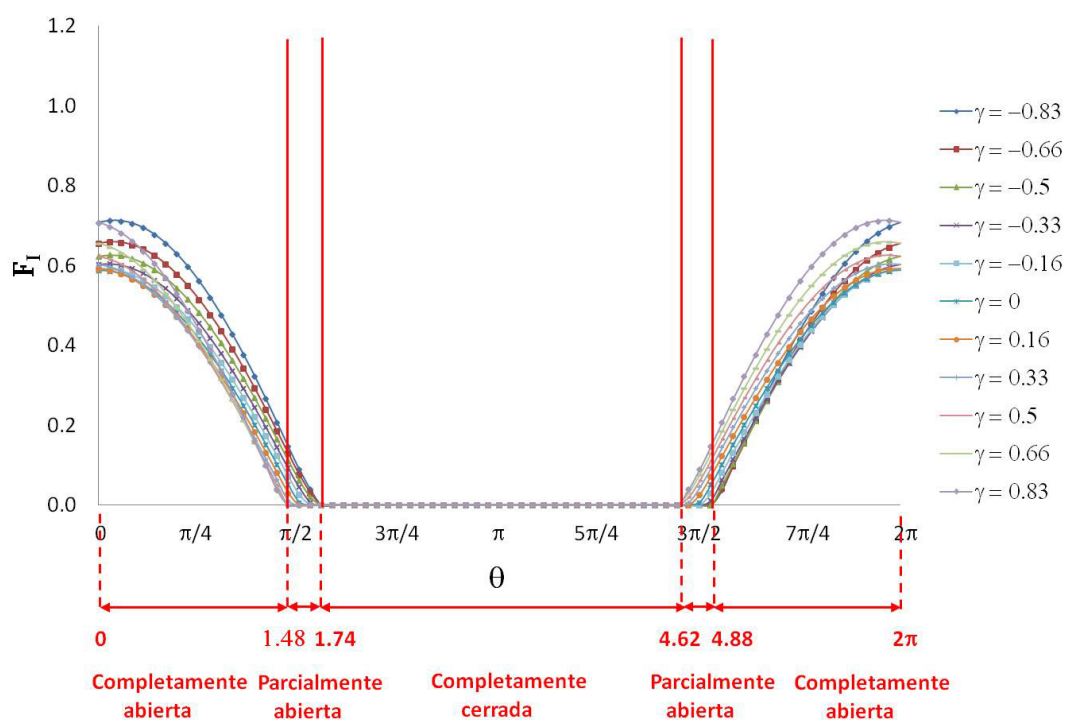


Figura 3.34: Apertura y cierre de la fisura para un factor de forma $\beta = 1$ y una profundidad $\alpha = 0,1$

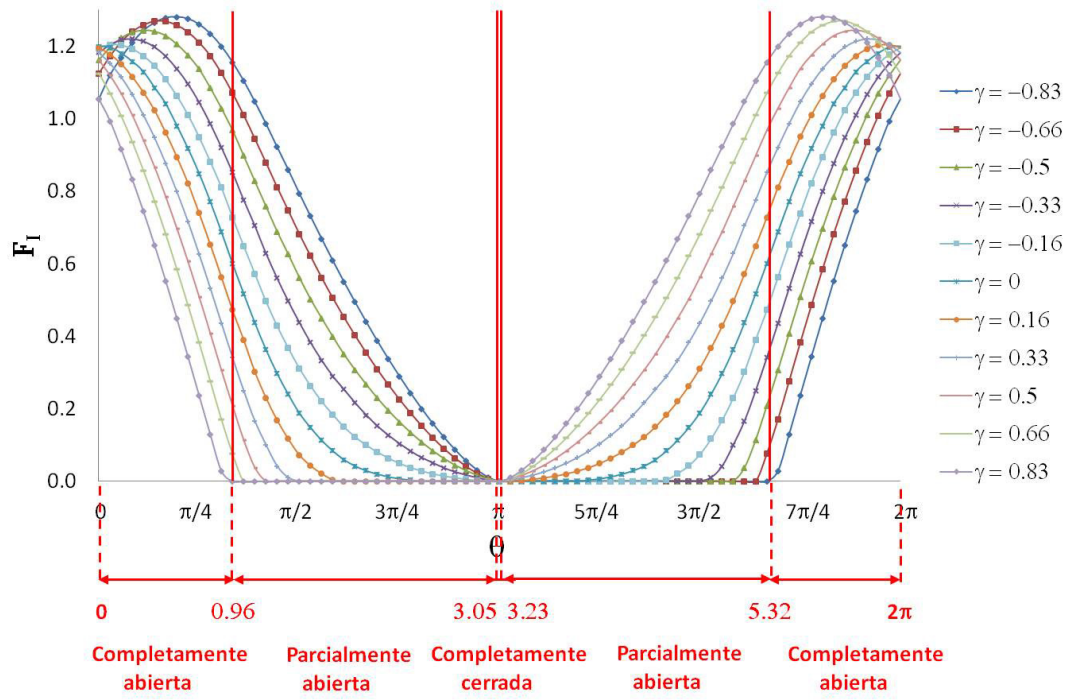


Figura 3.35: Apertura y cierre de la fisura para un factor de forma $\beta = 0$ y una profundidad $\alpha = 0,5$

4

Expresión del Factor de Intensidad de Tensiones de un eje giratorio fisurado

En el presente capítulo se determina una expresión cerrada del FIT que permite calcular el valor del mismo en función de la profundidad relativa de la fisura, del factor de forma, de la posición relativa en el frente y del ángulo de giro del eje.

4.1 Obtención de la expresión del Factor de Intensidad de Tensiones

El FIT de una fisura se puede expresar como [16, 20]:

$$K_I = F_I \sigma \sqrt{\pi a} \quad (4.1)$$

donde F_I es el FIT adimensional, que en el caso de ejes giratorios depende, como se ha demostrado en el tercer capítulo, del ángulo de giro del eje, del punto del frente de la fisura que se considere y de las características geométricas de la misma:

$$F_I = F_I(\alpha, \beta, \gamma, \theta) \quad (4.2)$$

En estas condiciones no se ha encontrado en la literatura, en conocimiento de la autora, ninguna expresión del FIT adimensional, F_I , en función de las variables anteriores, y por tanto sería de gran utilidad disponer de ella para el estudio del comportamiento dinámico de ejes que contienen fisuras.

Durante el giro del eje, como se ha visto en el capítulo anterior, la fisura se abre y se cierra de forma gradual y como consecuencia del ello el problema se convierte en no lineal [4, 10, 92]. Por lo tanto, la determinación de la expresión del FIT debe tener en cuenta el mecanismo de apertura y cierre.

El comportamiento del eje se puede considerar como una secuencia de fases lineales y no lineales. Cuando la fisura se encuentra completamente abierta el problema es lineal, sin embargo, cuando la fisura se encuentra parcialmente cerrada, el problema se convierte en no lineal. Teniendo en cuenta estas dos situaciones, se ha obtenido una expresión del FIT adimensional.

En la figura 4.1 se muestra la representación del FIT adimensional en función del ángulo de giro θ para las diferentes posiciones en el frente de fisura γ y un

caso genérico de α y β . Se remarca en color rojo la línea correspondiente a una posición genérica en el frente de fisura γ y en azul la correspondiente a la posición genérica $-\gamma$. Nótese que en este caso, según la representación de la figura 4.1, el eje gira en sentido horario.

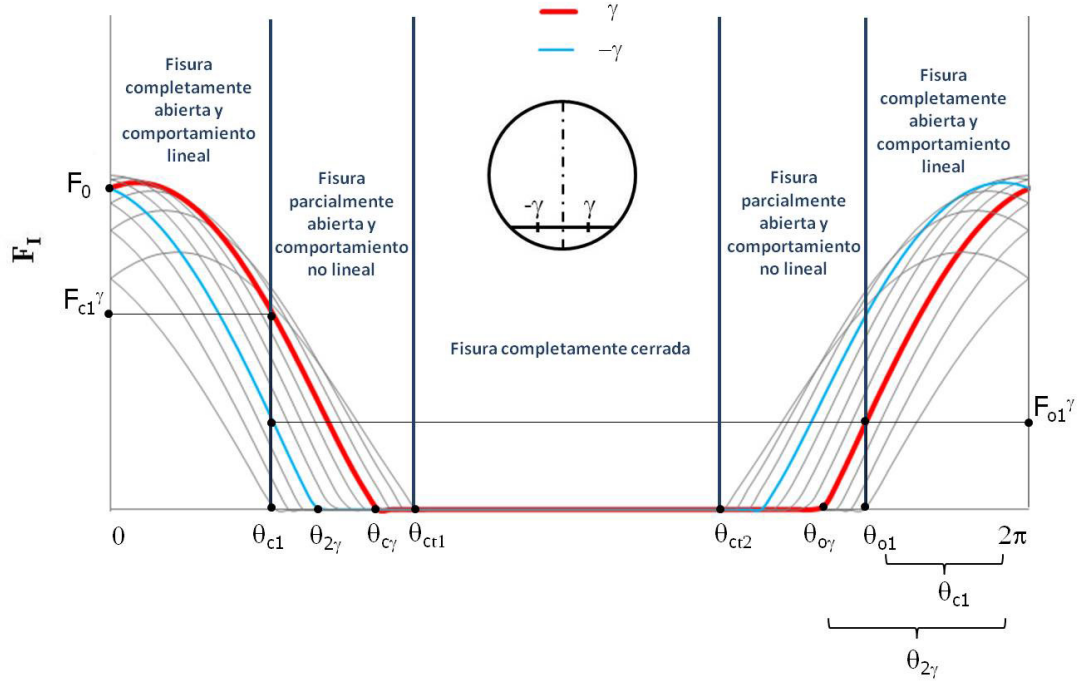


Figura 4.1: FIT adimensional en un giro completo del eje para cada posición angular en el frente de fisura.

La determinación de la expresión que define el FIT adimensional, F_I , requiere una serie de variables que se explican a continuación (ver figura 4.1):

- θ_{c1} es el ángulo para el que comienza a cerrarse el frente y depende de la profundidad relativa de la fisura α y del factor de forma β .

$$\theta_{c1} = \theta_{c1}(\alpha, \beta) \quad (4.3)$$

- θ_{cg} es el primer ángulo, para una determinada posición en el frente de fisura γ , en el que F_I es nulo (donde se cierra ese punto del frente), y depende de la profundidad relativa α , del factor de forma β y de la posición relativa en el frente γ .

$$\theta_{c\gamma} = \theta_{c\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (4.4)$$

- $\theta_{o\gamma}$ es el último ángulo, para una determinada posición en el frente de fisura γ , en el que F_I es nulo (donde se abre ese punto del frente) y depende de la profundidad relativa α , del factor de forma β y de la posición relativa en el frente γ .

$$\theta_{o\gamma} = \theta_{o\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (4.5)$$

- θ_{o1} es el ángulo para el que el frente de la fisura está completamente abierto de nuevo, es decir con todos los valores del F_I en el frente positivos. Depende de la profundidad relativa de la fisura α y del factor de forma β .

$$\theta_{o1} = \theta_{o1}(\alpha, \beta) \quad (4.6)$$

- $\theta_{2\gamma}$ es el primer ángulo, para la posición relativa en el frente de fisura $-\gamma$, en el que el F_I es nulo (donde se cierra ese punto del frente). Depende de la profundidad relativa de la fisura α , del factor de forma β y de la posición relativa en el frente γ .

$$\theta_{2\gamma} = \theta_{2\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (4.7)$$

- θ_{ct1} es el primer ángulo para el que frente está completamente cerrado, es decir, con todos los valores del F_I nulos. Depende de la profundidad relativa de la fisura α y del factor de forma β .

$$\theta_{ct1} = \theta_{ct1}(\alpha, \beta) \quad (4.8)$$

- θ_{ct2} es el último ángulo para el que frente está completamente cerrado. Depende de la profundidad relativa de la fisura α y del factor de forma β .

$$\theta_{ct2} = \theta_{ct2}(\alpha, \beta) \quad (4.9)$$

- F_0 es el valor de F_I para un ángulo $\theta = 0$ en un determinado γ . Depende de la profundidad relativa de la fisura α , del factor de forma β y de la posición relativa en el frente γ .

$$F_0 = F_0(\alpha, \beta, \gamma; \theta = 0) \quad (4.10)$$

- F_{c1}^γ es el valor de F_I para un ángulo $\theta = \theta_{c1}$ en un determinado γ . Es función de la profundidad relativa de la fisura α , del factor de forma β y de la posición relativa en el frente γ .

$$F_{c1}^\gamma = F_{c1}^\gamma(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{c1}) \quad (4.11)$$

- F_{o1}^γ es el valor de F_I para un ángulo $\theta = \theta_{o1}$ en un determinado γ . También depende de la profundidad relativa de la fisura α , del factor de forma β y de la posición relativa en el frente γ .

$$F_{o1}^\gamma = F_{o1}^\gamma(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{o1}) \quad (4.12)$$

4.1.1 FIT con fisura completamente abierta

En primer lugar, se va a analizar la situación correspondiente a una fisura completamente abierta. En esta situación la expresión de F_I debe representar el comportamiento lineal del eje. En la figura 4.2 se muestran las zonas que se analizan en este apartado. Se van a distinguir dos intervalos de giro: de 0 a π (Intervalo 1; FIT adimensional denominado $F_{I,1}^-$) y de π a 2π (Intervalo 2; FIT adimensional denominado $F_{I,2}^+$).

El FIT adimensional, F_I , se puede expresar tomando como base el modelo de Carpinteri [6] como:

$$F_{I,1}^-(\alpha, \beta, \gamma, \theta) = A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta \quad (\text{Intervalo 1}) \quad (4.13)$$

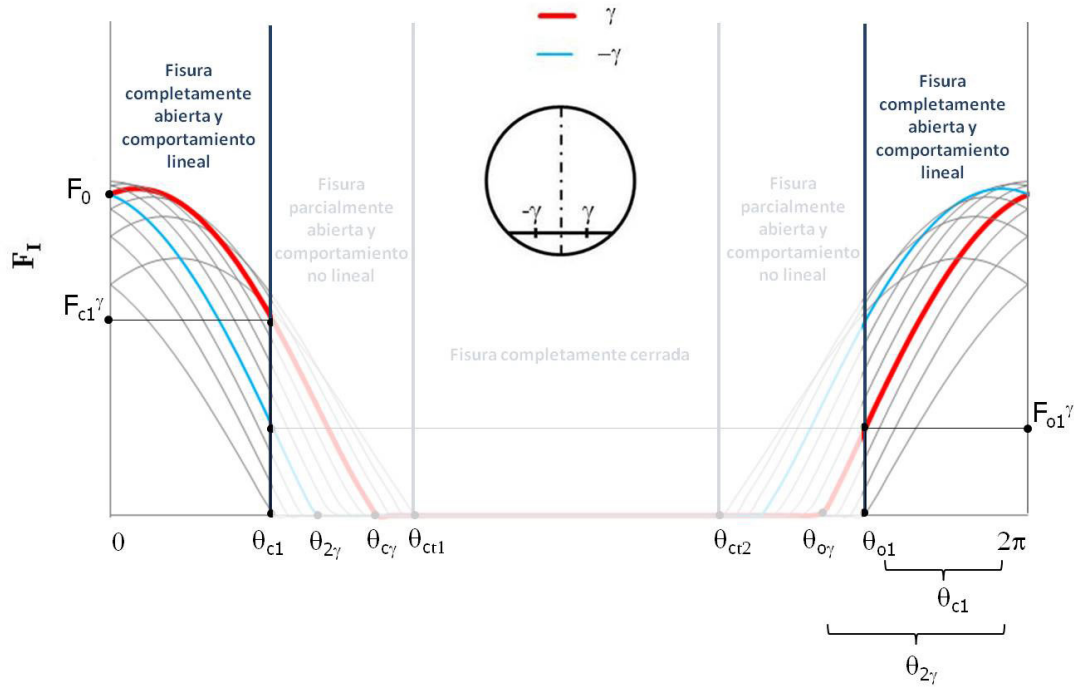


Figura 4.2: Fisura completamente abierta y comportamiento lineal

$$F_{I,2}^+(\alpha, \beta, \gamma, \theta) = A_2 \cos \theta + B_2 \sin \theta \quad (\text{Intervalo 2}) \quad (4.14)$$

donde A_1 , B_1 , A_2 y B_2 son constantes que se obtienen con las siguientes condiciones:

- Para el intervalo 1

$$F_{I,1}^-(\alpha, \beta, \gamma; \theta = 0) = F_0 \quad (4.15)$$

$$F_{I,1}^-(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{c1}) = F_{c1}^\gamma \quad (4.16)$$

obteniéndose con las ecuaciones 4.13 y 4.14 los siguientes valores de las constantes A_1 y B_1 :

$$A_1 = F_0 \quad (4.17)$$

$$B_1 = \frac{F_{c1}^\gamma - F_0 \cos \theta_{c1}}{\text{sen} \theta_{c1}} \quad (4.18)$$

■ Para el intervalo 2

$$F_{I,2}^+(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{o1}) = F_{o1}^\gamma \quad (4.19)$$

$$F_{I,2}^+(\alpha, \beta, \gamma; \theta = 2\pi) = F_0 \quad (4.20)$$

y por tanto:

$$A_2 = F_0 \quad (4.21)$$

$$B_2 = \frac{F_{o1}^\gamma - F_0 \cos \theta_{o1}}{\text{sen} \theta_{o1}} \quad (4.22)$$

La expresión del FIT adimensional, F_I , requiere la determinación de unas expresiones previas que definan las variables anteriores (4.3 a 4.12). Estas expresiones previas se han obtenido considerando todos los valores disponibles de las simulaciones numéricas mediante el uso de una serie de ajustes por la técnica de regresión múltiple. Para el parámetro F_0 se ha obtenido el siguiente ajuste polinómico:

$$F_0(\alpha, \beta, \gamma; \theta = 0) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 \sum_{k=0}^4 C_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k \quad (4.23)$$

donde C_{ijk} son los coeficientes del ajuste, i es el grado del polinomio en α , j es el grado del polinomio en β y k es el grado del polinomio en γ . El mejor ajuste se ha obtenido con un polinomio de grado 4 en las tres variables α , β y γ , y con un coeficiente del ajuste $R^2 = 0,9999$. Los coeficientes C_{ijk} se muestran en las tablas A.1 y A.2 del anexo 1.

De igual manera, se determina F_{c1}^γ con todos los valores de F_{c1}^γ disponibles en $\theta = \theta_{c1}$:

$$F_{c1}^\gamma(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{c1}) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 \sum_{k=0}^4 M_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k \quad (4.24)$$

donde M_{ijk} son los coeficientes del ajuste para F_{c1}^γ , que vienen dados en las tablas A.3 y A.4 del anexo 1. Para estas condiciones, el mejor ajuste se obtiene con un polinomio de grado 4 en α , β y γ , con un coeficiente $R^2 = 0,9995$.

Debido a la simetría de la geometría del problema, F_{o1}^γ se determina utilizando el mismo ajuste que para F_{c1}^γ , pero cambiando el valor de la posición en el frente de la fisura γ por $-\gamma$.

$$F_{o1}^\gamma(\alpha, \beta, \gamma) = F_{c1}^\gamma(\alpha, \beta, -\gamma) \quad (4.25)$$

También es posible obtener el ángulo θ_{c1} mediante la expresión:

$$\theta_{c1}(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 N_{ij} \alpha^i \beta^j \quad (4.26)$$

Los coeficientes del ajuste N_{ij} se muestran en la tabla A.5 del anexo 1. El mejor ajuste se obtiene con un polinomio de grado 4 en α y β , con un coeficiente del ajuste $R^2 = 0,9999$.

En el caso del ángulo θ_{o1} , debido a que la fisura se abre y se cierra con simetría cuando el eje rota, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\theta_{o1}(\alpha, \beta) = 2\pi - \theta_{c1}(\alpha, \beta) \quad (4.27)$$

4.1.2 FIT con fisura parcialmente cerrada

Cuando la fisura se encuentra parcialmente cerrada el comportamiento del eje es no lineal [3, 10, 4] (ver figura 4.3), por lo tanto es necesario sustituir las expresiones 4.13 y 4.14 por otras que recojan el comportamiento no lineal. En este caso también se van a distinguir dos intervalos de giro: de 0 a π (Intervalo 1; FIT adimensional denominado $F_{I,1}^+$) y de π a 2π (Intervalo 2; FIT adimensional denominado $F_{I,2}^-$):

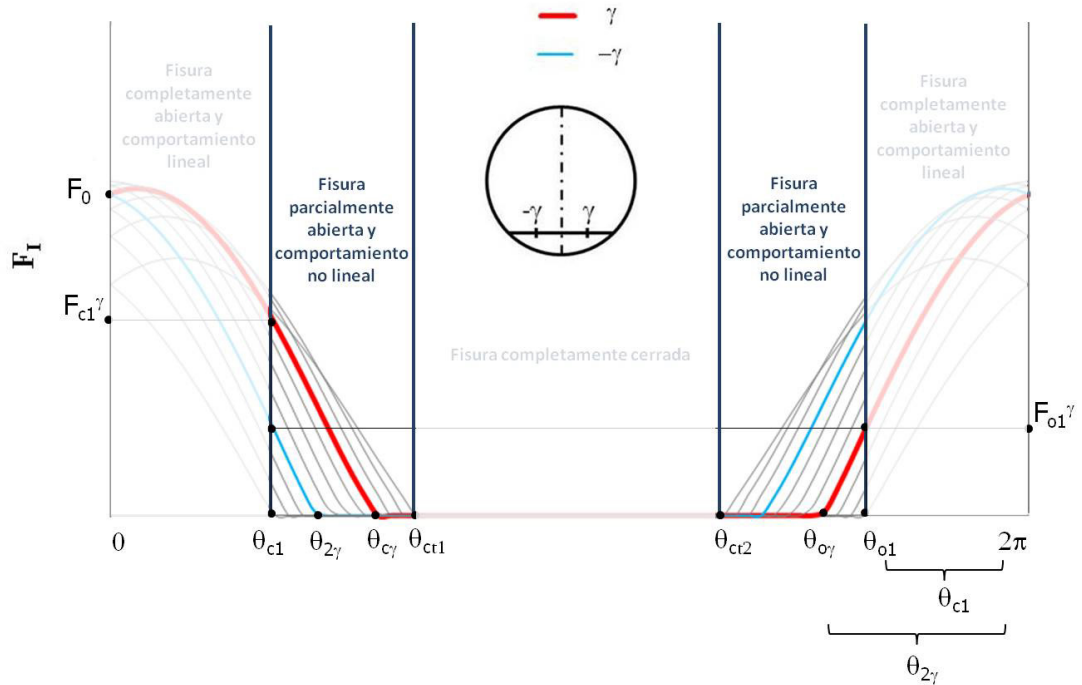


Figura 4.3: Fisura parcialmente cerrada y comportamiento no lineal

$$F_{I,1}^+(\alpha, \beta, \gamma, \theta) = C_1\theta^3 + D_1\theta^2 + E_1\theta + H_1 \quad (\text{Intervalo 1}) \quad (4.28)$$

$$F_{I,2}^-(\alpha, \beta, \gamma, \theta) = C_2\theta^3 + D_2\theta^2 + E_2\theta + H_2 \quad (\text{Intervalo 2}) \quad (4.29)$$

donde C_1 , D_1 , E_1 , H_1 , C_2 , D_2 , E_2 y H_2 son unas constantes que se obtienen con las siguientes condiciones:

- Para el intervalo 1

$$F_{I,1}^+(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{c1}) = F_{c1}^\gamma \quad (4.30)$$

$$F_{I,1}^+(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{c\gamma}) = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{dF_{I,1}^+(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{c1})}{d\theta} = \frac{dF_{I,1}^-(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{c1})}{d\theta} \quad (4.32)$$

$$\frac{dF_{I,1}^+(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{c\gamma})}{d\theta} = 0 \quad (4.33)$$

a partir de la ecuación 4.28 se obtiene el valor de las constantes C_1 , D_1 , E_1 y F_1 :

$$C_1 = \frac{(\theta_{c1} - \theta_{c\gamma})(B_1 \cos \theta_{c1} - A_1 \text{sen} \theta_{c1}) - 2F_{c1}^\gamma}{(\theta_{c1} - \theta_{c\gamma})^3} \quad (4.34)$$

$$D_1 = \frac{3F_{c1}^\gamma(\theta_{c1} + \theta_{c\gamma}) - (\theta_{c1} - \theta_{c\gamma})(\theta_{c1} + 2\theta_{c\gamma})(B_1 \cos \theta_{c1} - A_1 \text{sen} \theta_{c1})}{(\theta_{c1} - \theta_{c\gamma})^3} \quad (4.35)$$

$$E_1 = \frac{\theta_{c\gamma}(2\theta_{c1} + \theta_{c\gamma})(\theta_{c1} - \theta_{c\gamma})(B_1 \cos \theta_{c1} - A_1 \text{sen} \theta_{c1}) - 6F_{c1}^\gamma \theta_{c1} \theta_{c\gamma}}{(\theta_{c1} - \theta_{c\gamma})^3} \quad (4.36)$$

$$H_1 = \frac{F_{c1}^\gamma \theta_{c\gamma}^2 (3\theta_{c1} - \theta_{c\gamma}) - \theta_{c1} \theta_{c\gamma}^2 (\theta_{c1} - \theta_{c\gamma})(B_1 \cos \theta_{c1} - A_1 \text{sen} \theta_{c1})}{(\theta_{c1} - \theta_{c\gamma})^3} \quad (4.37)$$

- Y para el intervalo 2

$$F_{I,2}^-(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{o1}) = F_{o1}^\gamma \quad (4.38)$$

$$F_{I,2}^-(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{o\gamma}) = 0 \quad (4.39)$$

$$\frac{dF_{I,2}^-(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{01})}{d\theta} = \frac{dF_{I,2}^+(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{01})}{d\theta} \quad (4.40)$$

$$\frac{dF_{I,2}^-(\alpha, \beta, \gamma; \theta = \theta_{0\gamma})}{d\theta} = 0 \quad (4.41)$$

a partir de la ecuación 4.29 se obtiene el valor de las constantes C_2 , D_2 , E_2 y F_2 :

$$C_2 = \frac{(\theta_{01} - \theta_{0\gamma})(B_2 \cos \theta_{01} - A_2 \operatorname{sen} \theta_{01}) - 2F_{01}^\gamma}{(\theta_{01} - \theta_{0\gamma})^3} \quad (4.42)$$

$$D_2 = \frac{3F_{01}^\gamma(\theta_{01} + \theta_{0\gamma}) - (\theta_{01} - \theta_{0\gamma})(\theta_{01} + 2\theta_{0\gamma})(B_2 \cos \theta_{01} - A_2 \operatorname{sen} \theta_{01})}{(\theta_{01} - \theta_{0\gamma})^3} \quad (4.43)$$

$$E_2 = \frac{\theta_{0\gamma}(2\theta_{01} + \theta_{0\gamma})(\theta_{01} - \theta_{0\gamma})(B_2 \cos \theta_{01} - A_2 \operatorname{sen} \theta_{01}) - 6F_{01}^\gamma \theta_{01} \theta_{0\gamma}}{(\theta_{01} - \theta_{0\gamma})^3} \quad (4.44)$$

$$H_2 = \frac{F_{01}^\gamma \theta_{0\gamma}^2 (3\theta_{01} - \theta_{0\gamma}) - \theta_{01} \theta_{0\gamma}^2 (\theta_{01} - \theta_{0\gamma})(B_2 \cos \theta_{01} - A_2 \operatorname{sen} \theta_{01})}{(\theta_{01} - \theta_{0\gamma})^3} \quad (4.45)$$

Al igual que se ha hecho con los parámetros anteriores, para determinar $\theta_{c\gamma}$, se realiza un ajuste polinómico mediante técnicas de regresión múltiple, y se obtiene la expresión:

$$\theta_{c\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^7 P_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k \quad (4.46)$$

donde P_{ijk} son los coeficientes del ajuste que se muestran en las tablas A.6 y A.7 del anexo 1. El mejor ajuste se obtiene con un polinomio de grado 3 en α , grado 2 en β y grado 7 en γ , con un coeficiente $R^2 = 0,9966$.

El ángulo de rotación $\theta_{o\gamma}$ puede obtenerse mediante la expresión:

$$\theta_{o\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) = 2\pi - \theta_{2\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (4.47)$$

$\theta_{2\gamma}$ puede calcularse por la simetría de la geometría del problema mediante la utilización del mismo ajuste que se utilizaba para $\theta_{c\gamma}$, pero cambiando el valor de la posición en el frente γ , por $-\gamma$.

$$\theta_{2\gamma}(\gamma) = \theta_{c\gamma}(-\gamma) \quad (4.48)$$

4.1.3 FIT con fisura completamente cerrada

Para un ángulo de rotación entre θ_{ct1} y θ_{ct2} la fisura está cerrada (ver figura 4.4) por lo que los valores del FIT son siempre nulos.

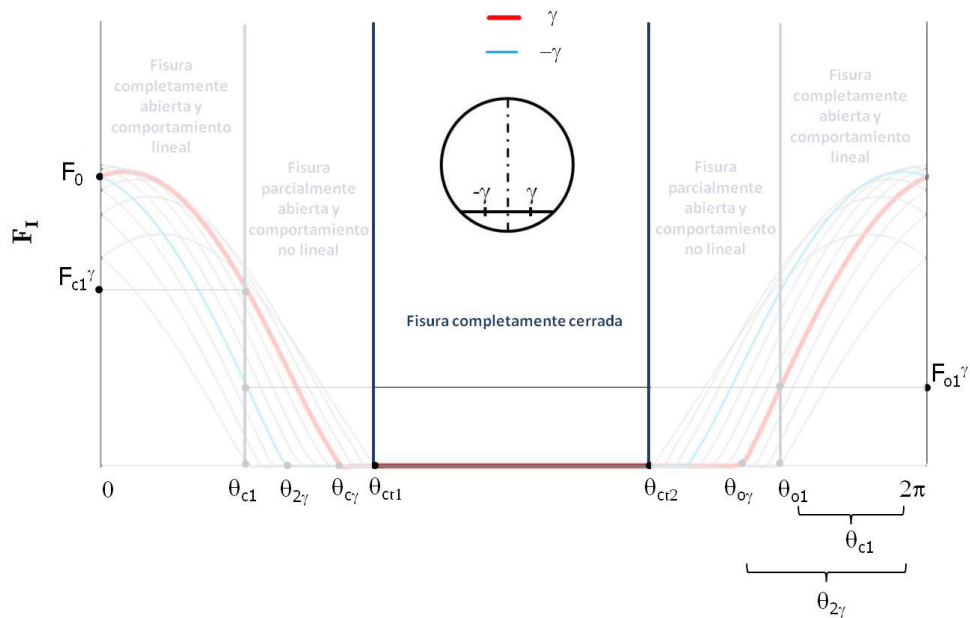


Figura 4.4: Fisura completamente cerrada

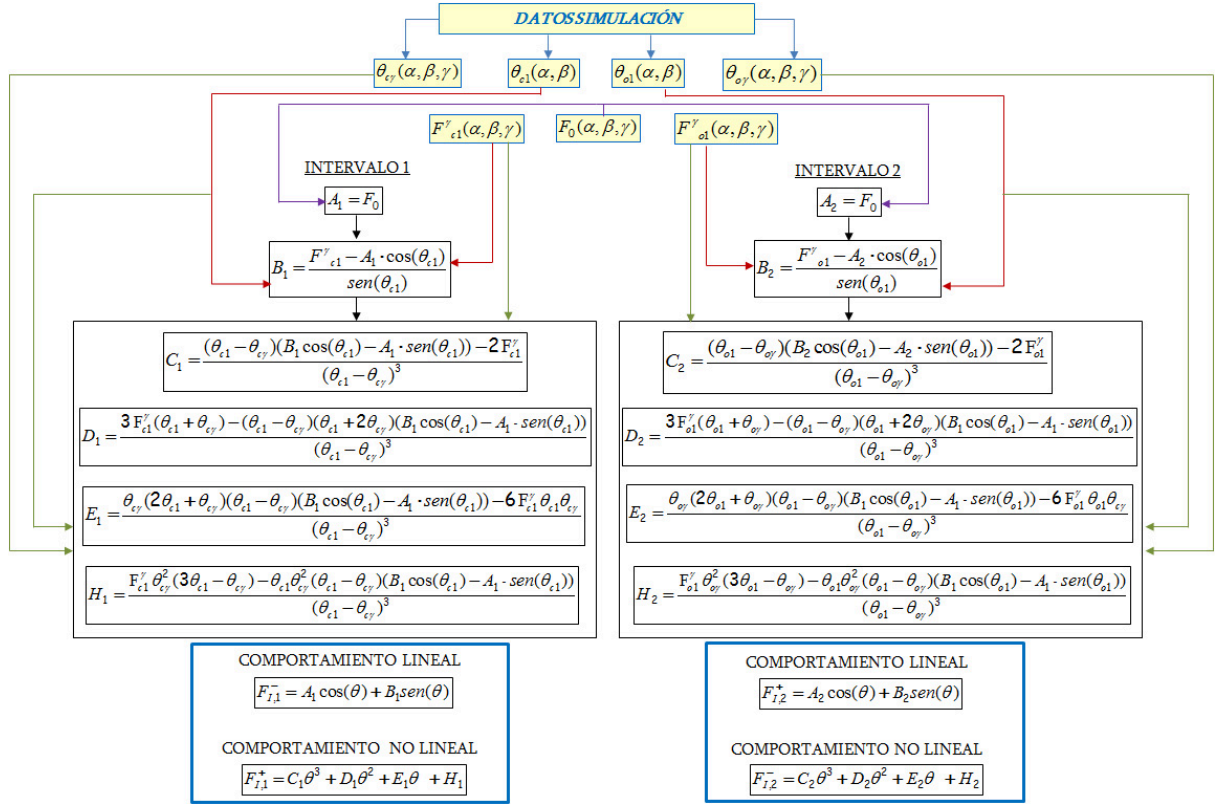


Figura 4.5: Esquema del procedimiento utilizado para calcular la expresión cerrada del FIT

Como resumen, en la figura 4.5 se muestra el esquema del procedimiento utilizado para obtener la expresión cerrada del FIT descrita.

De igual manera, en la figura 4.6 se muestra una tabla resumen donde aparecen todas las expresiones: la general del F_I (correspondiente al intervalo 1 y al intervalo 2), así como todas las constantes y expresiones de los ajustes.

INTERVALO 1	INTERVALO 2
<i>EXPRESIONES GENERALES</i>	
$F_{I,1}^- = A_1 \cos(\theta) + B_1 \sin(\theta)$	$F_{I,2}^+ = A_2 \cos(\theta) + B_2 \sin(\theta)$
$F_{I,1}^+ = C_1 \theta^3 + D_1 \theta^2 + E_1 \theta + H_1$	$F_{I,2}^- = C_2 \theta^3 + D_2 \theta^2 + E_2 \theta + H_2$
<i>CONSTANTES</i>	
$A_1 = F_0$	$A_2 = F_0$
$B_1 = \frac{F_{c1}^\gamma - A_1 \cdot \cos(\theta_{c1})}{\sin(\theta_{c1})}$	$B_2 = \frac{F_{o1}^\gamma - A_2 \cdot \cos(\theta_{o1})}{\sin(\theta_{o1})}$
$C_1 = \frac{(\theta_{c1} - \theta_{cy})(B_1 \cos(\theta_{c1}) - A_1 \cdot \sin(\theta_{c1})) - 2 F_{c1}^\gamma}{(\theta_{c1} - \theta_{cy})^3}$	$C_2 = \frac{(\theta_{o1} - \theta_{oy})(B_2 \cos(\theta_{o1}) - A_2 \cdot \sin(\theta_{o1})) - 2 F_{o1}^\gamma}{(\theta_{o1} - \theta_{oy})^3}$
$D_1 = \frac{3 F_{c1}^\gamma (\theta_{c1} + \theta_{cy}) - (\theta_{c1} - \theta_{cy})(\theta_{c1} + 2 \theta_{cy})(B_1 \cos(\theta_{c1}) - A_1 \cdot \sin(\theta_{c1}))}{(\theta_{c1} - \theta_{cy})^3}$	$D_2 = \frac{3 F_{o1}^\gamma (\theta_{o1} + \theta_{oy}) - (\theta_{o1} - \theta_{oy})(\theta_{o1} + 2 \theta_{oy})(B_2 \cos(\theta_{o1}) - A_2 \cdot \sin(\theta_{o1}))}{(\theta_{o1} - \theta_{oy})^3}$
$E_1 = \frac{\theta_{cy}(2 \theta_{c1} + \theta_{cy})(\theta_{c1} - \theta_{cy})(B_1 \cos(\theta_{c1}) - A_1 \cdot \sin(\theta_{c1})) - 6 F_{c1}^\gamma \theta_{c1} \theta_{cy}}{(\theta_{c1} - \theta_{cy})^3}$	$E_2 = \frac{\theta_{oy}(2 \theta_{o1} + \theta_{oy})(\theta_{o1} - \theta_{oy})(B_2 \cos(\theta_{o1}) - A_2 \cdot \sin(\theta_{o1})) - 6 F_{o1}^\gamma \theta_{o1} \theta_{oy}}{(\theta_{o1} - \theta_{oy})^3}$
$H_1 = \frac{F_{c1}^\gamma \theta_{cy}^2 (3 \theta_{c1} - \theta_{cy}) - \theta_{c1} \theta_{cy}^2 (\theta_{c1} - \theta_{cy})(B_1 \cos(\theta_{c1}) - A_1 \cdot \sin(\theta_{c1}))}{(\theta_{c1} - \theta_{cy})^3}$	$H_2 = \frac{F_{o1}^\gamma \theta_{oy}^2 (3 \theta_{o1} - \theta_{oy}) - \theta_{o1} \theta_{oy}^2 (\theta_{o1} - \theta_{oy})(B_2 \cos(\theta_{o1}) - A_2 \cdot \sin(\theta_{o1}))}{(\theta_{o1} - \theta_{oy})^3}$
<i>EXPRESIONES DE LOS AJUSTES</i>	
$F_0(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 \sum_{k=0}^4 C_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k$	
$F_{c1}^\gamma(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 \sum_{k=0}^4 M_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k$	$F_{o1}^\gamma(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 \sum_{k=0}^4 M_{ijk} \alpha^i \beta^j (-\gamma)^k$
$\theta_{c1}(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 N_{ij} \alpha^i \beta^j$	$\theta_{o1}(\alpha, \beta) = 2\pi - \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 N_{ij} \alpha^i \beta^j$
$\theta_{cy}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^7 P_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k$	$\theta_{oy}(\alpha, \beta, \gamma) = 2\pi - \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^7 P_{ijk} \alpha^i \beta^j (-\gamma)^k$

Figura 4.6: Tabla resumen de la expresión del FIT

4.2 Validación de la expresión del FIT

Para comprobar la bondad del modelo de cálculo del FIT, tabla 4.6, que es función de cuatro variables diferentes, obtenido mediante el ajuste de numerosos parámetros, se procede, en este apartado, a su comparación con resultados numéricos. En las figuras 4.7 a 4.11 se muestran las comparaciones, en función del ángulo de giro θ , para los casos correspondientes a una profundidad de fisura $\alpha = 0.3$, las posiciones relativas en el frente de fisura $\gamma = -0.83; -0.5; 0; 0.5$ y 0.83

y todos los casos de β . En dichas figuras se observa que la concordancia entre los resultados de la expresión y los numéricos es muy buena, salvo en los extremos en los que se ve una ligera diferencia, debido a que están afectados por el problema de borde explicado en el apartado 3.1.1.

Aunque aquí se han representado unos casos concretos los resultados son ampliables a cualquier combinación de tamaño de fisura, forma de frente, posición en el frente y ángulo girado por el eje.

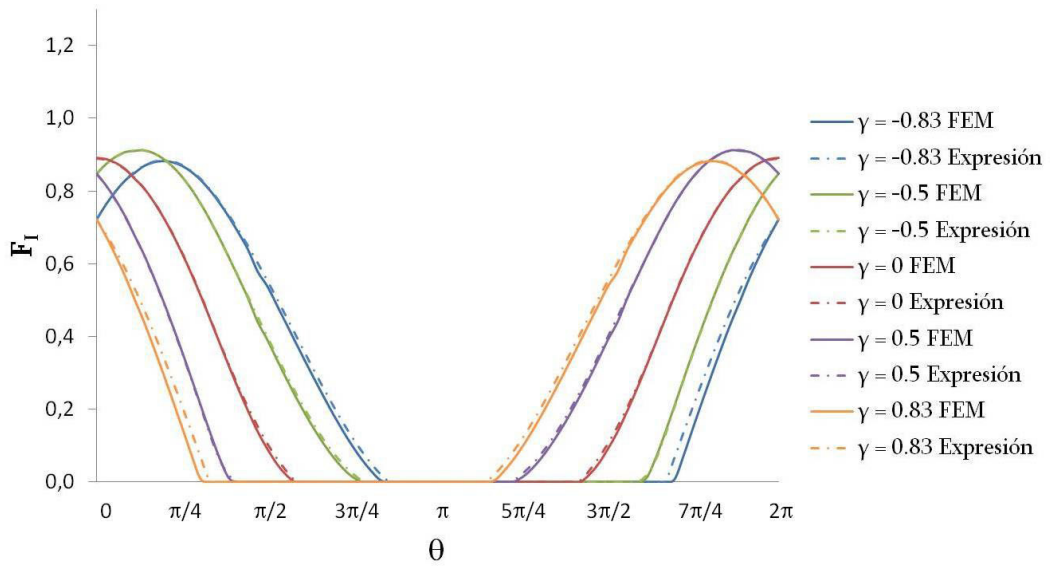
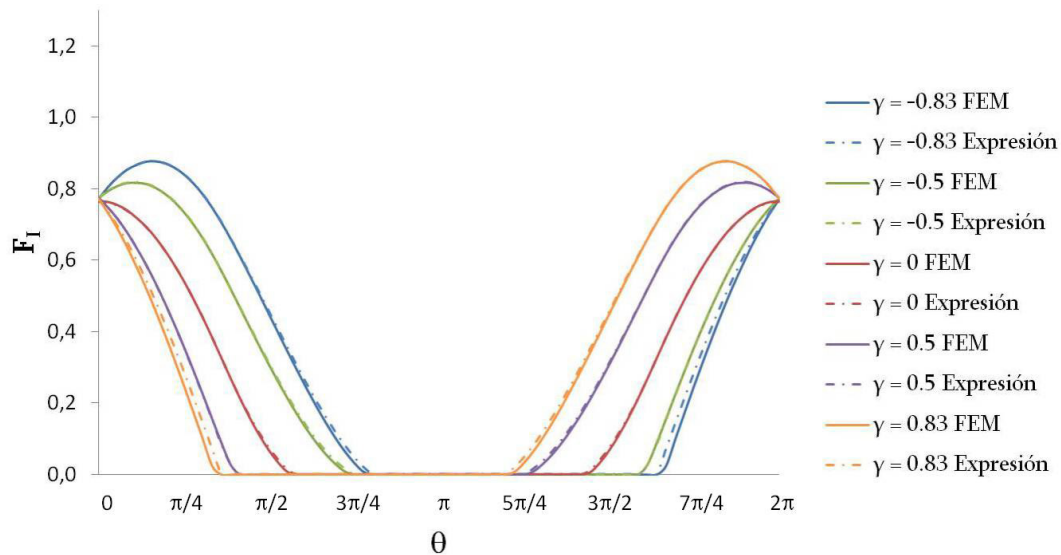
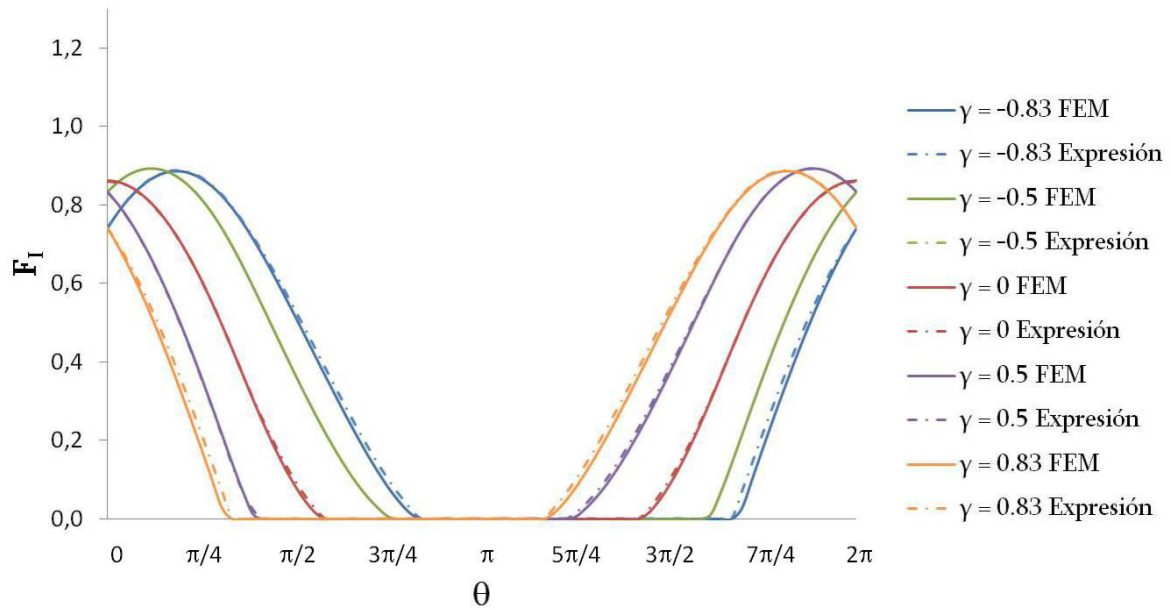


Figura 4.7: Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante la expresión cerrada y los resultados numéricos, en función del ángulo de giro θ , para $\alpha = 0.3$ y $\beta = 0$



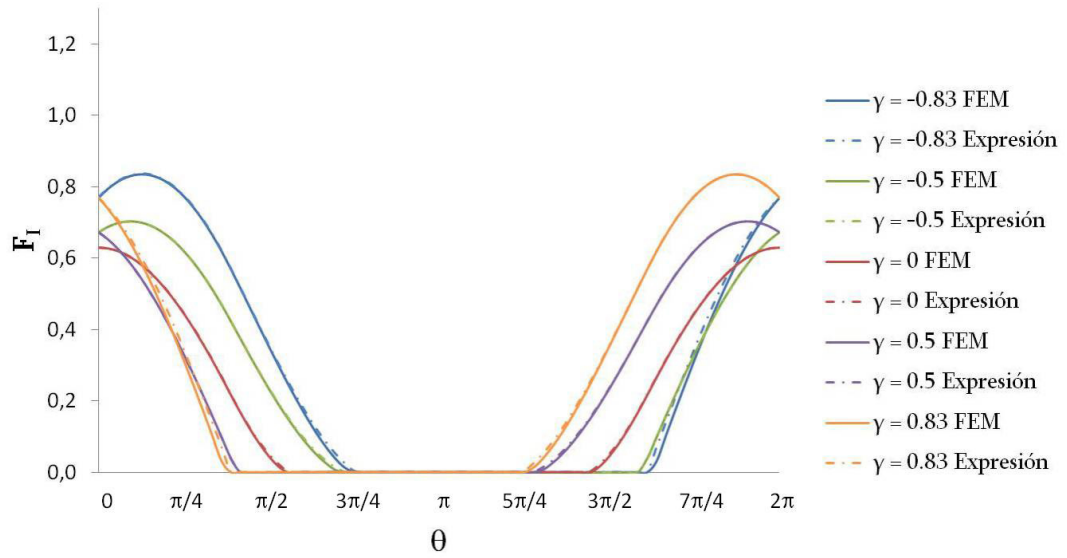


Figura 4.10: Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante la expresión cerrada y los resultados numéricos, en función del ángulo de giro θ , para $\alpha = 0.3$ y $\beta = 0.75$

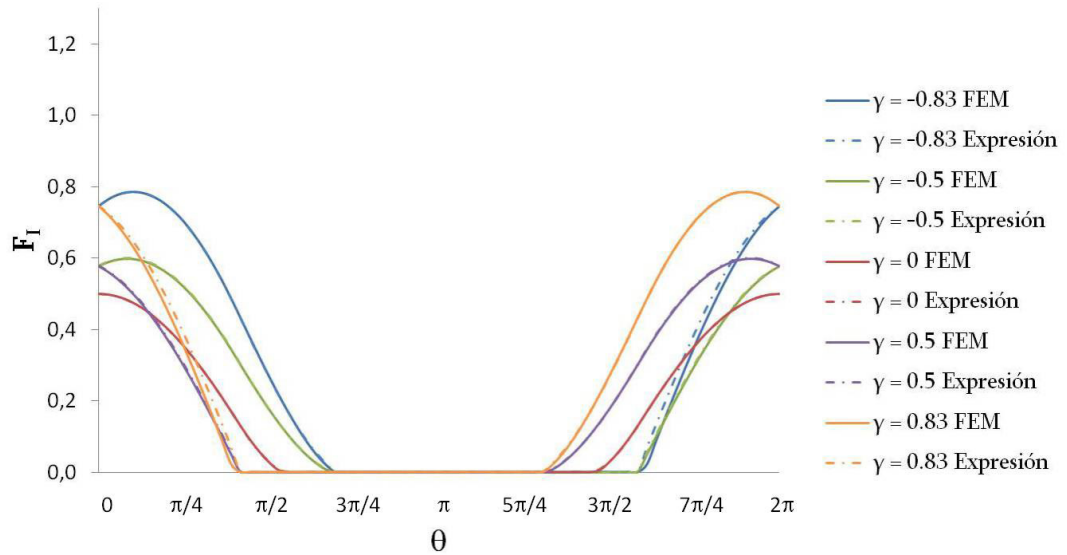


Figura 4.11: Comparación entre los resultados del F_I obtenidos mediante la expresión cerrada y los resultados numéricos, en función del ángulo de giro θ , para $\alpha = 0.3$ y $\beta = 1$

4.2.1 Error relativo medio

Para medir el error cometido en el cálculo del FIT utilizando el modelo propuesto se ha calculado el error relativo medio. El cálculo se realiza mediante la siguiente expresión:

$$\bar{\varepsilon}_{F_I}(\%) = 100 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{F_{I,MOD}^{(i)} - F_{I,FEM}^{(i)}}{F_{I,FEM}^{(i)}} \right| \quad (4.49)$$

donde $F_{I,FEM}$ es el valor del F_I obtenido numéricamente y $F_{I,MOD}$ es el valor del F_I estimado mediante el modelo.

En la tabla 4.1 se muestra el error considerando los valores correspondientes a todas las posiciones del frente y todos los ángulos de giro para cada combinación de α y β .

Tabla 4.1: Error relativo medio (%)

	$\beta = 0$	$\beta = 0,25$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,75$	$\beta = 1$
$\alpha = 0,1$	3,85	3,30	3,64	5,58	1,33
$\alpha = 0,2$	3,46	7,92	3,58	1,65	2,52
$\alpha = 0,3$	6,68	5,13	4,37	3,02	3,68
$\alpha = 0,4$	5,97	4,03	4,89	2,95	3,62
$\alpha = 0,5$	5,82	4,97	7,06	6,16	8,16

De igual manera, se calcula el promedio de las diferencias mediante la expresión:

$$\bar{\delta}_{F_I} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{F_{I,MOD}^{(i)} - F_{I,FEM}^{(i)}}{n} \right| \quad (4.50)$$

En la tabla 4.2 se muestran las diferencias entre el valor numérico del F_I y el valor del F_I estimado mediante el modelo considerando los valores correspondientes

a todas las posiciones del frente y todos los ángulos de giro para cada combinación de α y β .

Tabla 4.2: Diferencias entre el valor numérico del F_I y el valor del F_I estimado mediante el ajuste

	$\beta = 0$	$\beta = 0,25$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,75$	$\beta = 1$
$\alpha = 0,1$	0,0054	0,0042	0,0037	0,0040	0,0019
$\alpha = 0,2$	0,0053	0,0056	0,0033	0,0019	0,0026
$\alpha = 0,3$	0,0055	0,0051	0,0042	0,0030	0,0032
$\alpha = 0,4$	0,0053	0,0046	0,0055	0,0026	0,0031
$\alpha = 0,5$	0,0067	0,0064	0,0054	0,0042	0,0062

Se observa que todos los errores relativos son inferiores al 8 %, y todas las diferencias son inferiores a 0.007. A la vista de estos resultados de los errores y las diferencias, se puede decir que el modelo ofrece buenas estimaciones del valor de F_I . Las discrepancias se deben a los posibles errores numéricos del modelo y a los correspondientes a los múltiples ajustes necesarios para obtener el modelo final.

5

Modelo de propagación

En este capítulo se analiza la propagación de una fisura de frente semielíptico contenida en un eje giratorio mediante la Ley de Paris, utilizando el modelo desarrollado en el Capítulo 4 de esta Tesis. Para ello se ha adaptado un algoritmo de integración que permite reconstruir el nuevo frente de la fisura tras la propagación producida en ciclos anteriores.

5.1 Metodología para la obtención de la geometría del frente

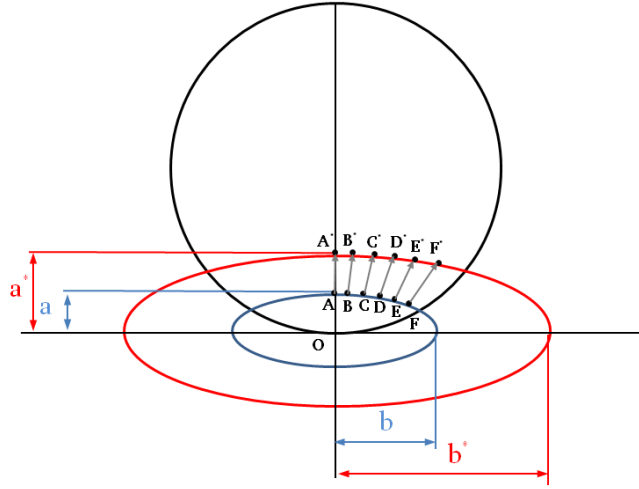
El método propuesto consiste en determinar la propagación de la fisura para una geometría inicial dada mediante una integración de la Ley de Paris-Erdogan:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K_I^m \quad (5.1)$$

donde $\frac{da}{dN}$ es la tasa de crecimiento de la fisura y viene expresada en $m/ciclo$; ΔK_I es el incremento del FIT y viene expresado en $MPa\sqrt{m}$; C y m son las constantes de la Ley de Paris, que dependen del material y que en el caso concreto de esta Tesis Doctoral se han considerado las correspondientes al aluminio ($C = 45 \times 10^{-9}$ y $m = 2,9$).

Como hipótesis de partida se considera que el frente de la fisura se caracteriza por una elipse con centro en O , situado en la superficie del eje; semieje menor a y semieje mayor b , que se relacionan con los parámetros α y β de la fisura (ver figura 5.1). Por otra parte, según proponen diversos autores, como [7, 6, 85, 8, 62, 88], se supone que el crecimiento de la fisura se produce en dirección perpendicular al frente de la misma. La integración de la Ley de Paris no se ha realizado ciclo a ciclo, sino considerando que el avance del punto central del frente se mantiene constante [85, 8, 62, 88].

Partiendo de la expresión del FIT adimensional en modo I , obtenida en el capítulo anterior, que depende de la geometría de la fisura, la profundidad de la misma y la posición sobre el frente de fisura, se obtiene la variación del FIT en cada uno de los puntos del frente en una rotación completa.

**Figura 5.1:** Evolución del frente de fisura

Una vez conocida la variación del FIT en cada punto del frente de la fisura en un giro completo del eje, se procede a determinar el valor máximo en ese punto, que puede escribirse mediante [6]:

$$\Delta K_{I, \text{giro completo}} = K_{I, \text{max}} - K_{I, \text{min}} \quad (5.2)$$

donde $K_{I, \text{max}}$ y $K_{I, \text{min}}$ son los valores máximo y mínimo, respectivamente, del Factor de Intensidad de Tensiones durante un giro (ver figura 5.2).

Teniendo en cuenta que el valor mínimo del FIT en un giro $K_{I, \text{min}} = 0$ (según las conclusiones obtenidas en el apartado 3.5):

$$\Delta K_{I, \text{giro completo}} = K_{I, \text{max}} \quad (5.3)$$

Por consiguiente, el incremento del FIT que se considera en la Ley de Paris para cada uno de los puntos del frente, es igual al valor máximo del FIT en un giro completo del eje.

El avance de la fisura se obtiene integrando la Ley de Paris (ecuación 5.1), obteniendo como resultado, para un punto cualquiera, la expresión:

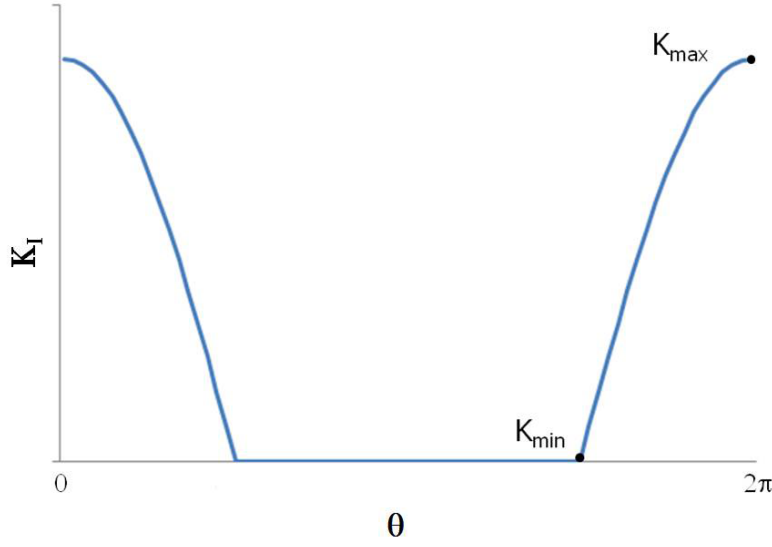


Figura 5.2: Valores máximo y mínimo del FIT para un γ genérico

$$\frac{\Delta a}{\Delta N} = C \cdot [\Delta K_I]^m \implies \Delta a = \Delta N \cdot C \cdot [\Delta K_I]^m \quad (5.4)$$

Tomando dos puntos del frente, el central (A) y uno cualquiera (P), el incremento alcanzado por cada uno de ellos es, respectivamente:

$$\Delta a(A) = \Delta N \cdot C \cdot [\Delta K_I(A)]^m \quad (5.5)$$

$$\Delta a(P) = \Delta N \cdot C \cdot [\Delta K_I(P)]^m \quad (5.6)$$

dividiendo la expresión 5.5 entre la expresión 5.6 se obtiene el avance de cada uno de los puntos del frente $\Delta a(P)$:

$$\Delta a(P) = \Delta a(A) \left(\frac{\Delta K_I(P)}{\Delta K_I(A)} \right)^m \quad (5.7)$$

donde $\Delta a(A)$ es el avance del punto central del frente, que se mantiene constante de una iteración a otra.

Los avances alcanzados mediante la expresión 5.7 permiten reconstruir el nuevo frente elíptico de la fisura, de parámetros a' y b' , mediante un ajuste por mínimos cuadrados (ver figura 5.1). El proceso se repite iterativamente durante un número de ciclos establecido.

En la figura 5.3 se muestra un esquema del procedimiento seguido.

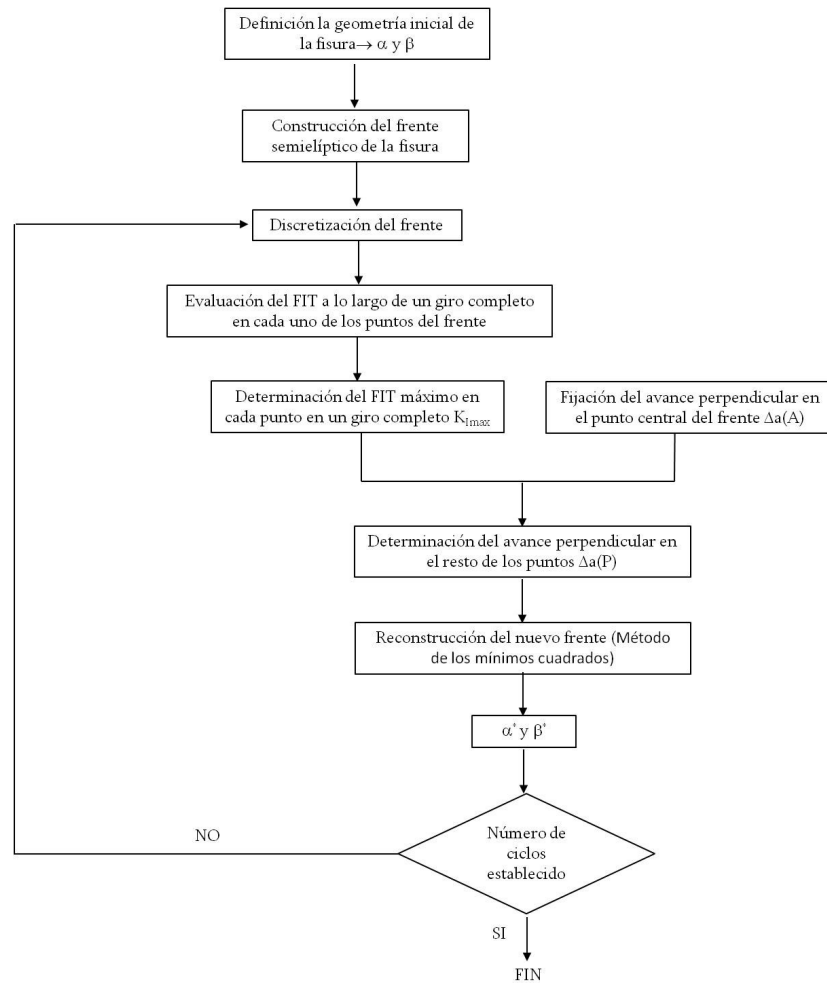


Figura 5.3: Esquema del procedimiento utilizado para determinar la propagación

El algoritmo desarrollado permite calcular el número de ciclos producidos para que se alcance el avance prefijado $\Delta a(A)$ en cada iteración (N_i), en el que se tiene en cuenta la variación de la forma del frente de una iteración a la siguiente. Por lo tanto es posible determinar el número total de ciclos necesario (N_T) para alcanzar

una geometría de fisura final partiendo de otra inicial, como la suma del número de ciclos calculados en cada una de las iteraciones:

$$N_T = \sum_{i=1}^{iter} N_i \quad (5.8)$$

donde $iter$ es el número de iteraciones estudiadas

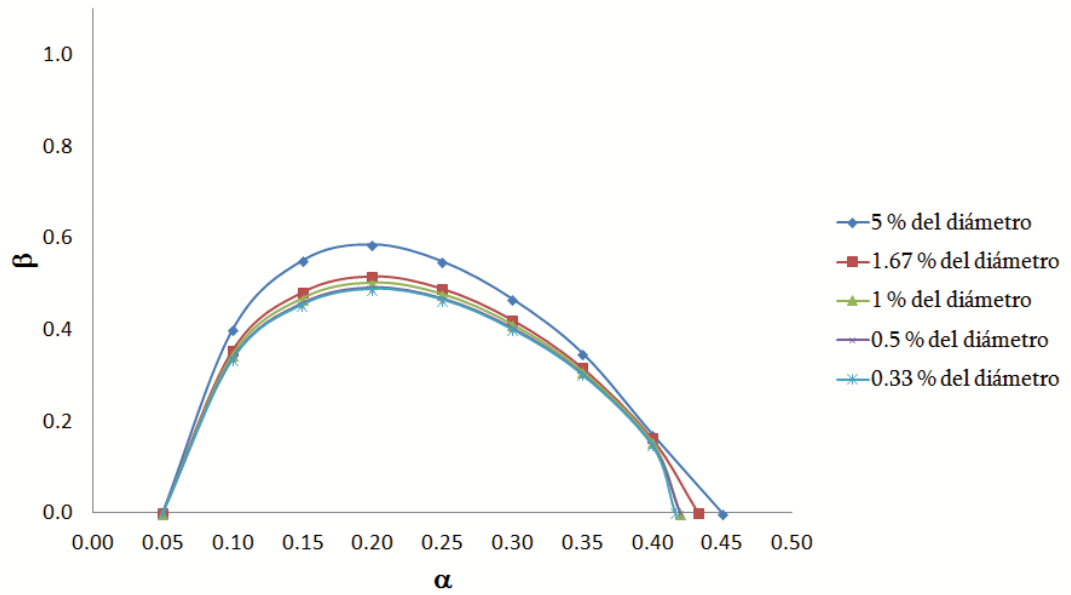
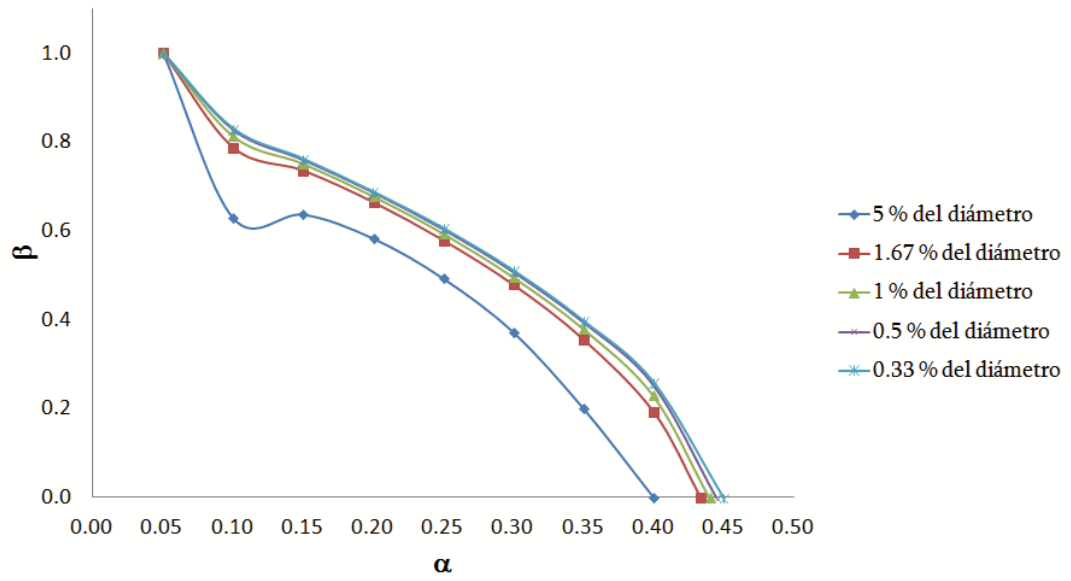
$$N_i = \int_{a_i}^{a_i + \Delta a(A)} \frac{da}{C \Delta(K_{I_{max}}^i(A))^m} \quad (5.9)$$

donde a_i es el tamaño de la fisura inicial en una iteración y $\Delta K_{I_{max}}^i(A)$ es la variación del FIT que el punto A experimenta en una iteración.

5.2 Determinación del avance óptimo en el punto central del frente

Con el objeto de determinar el valor óptimo del avance inicial del punto central del frente de la fisura, $\Delta a(A)$, que, como se ha indicado previamente, se mantiene constante durante la integración, se ha realizado un estudio previo de sensibilidad al $\Delta a(A)$. Se ha partido de unos valores iniciales de profundidad (α_o) y forma (β_o), analizando la propagación para diferentes valores del avance, decrecientes desde el 5 % del diámetro al 0.33 %, estudiando la relación entre la profundidad y la forma del frente de fisura, hasta alcanzar la convergencia de resultados.

Las figuras 5.4 a 5.7 muestran algunos de los resultados de este análisis de sensibilidad. Como puede observarse en cada figura, la propagación de la fisura, con una geometría inicial dada, tiende a ser la misma a partir de un determinado valor de $\Delta a(A)$. Igualmente, se puede ver en todas las gráficas, independientemente de la geometría inicial, el avance que proporciona el mismo resultado final de propagación es el 0.5 % del diámetro.



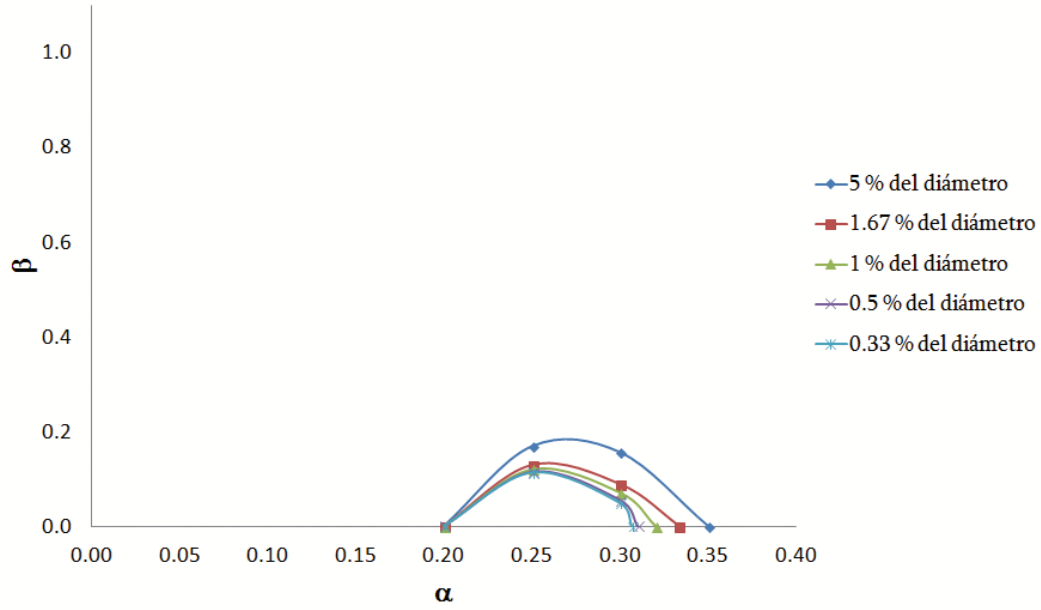


Figura 5.6: Estudio de sensibilidad de $\Delta a(A)$ ($\alpha_o = 0.2$ $\beta_o = 0$)

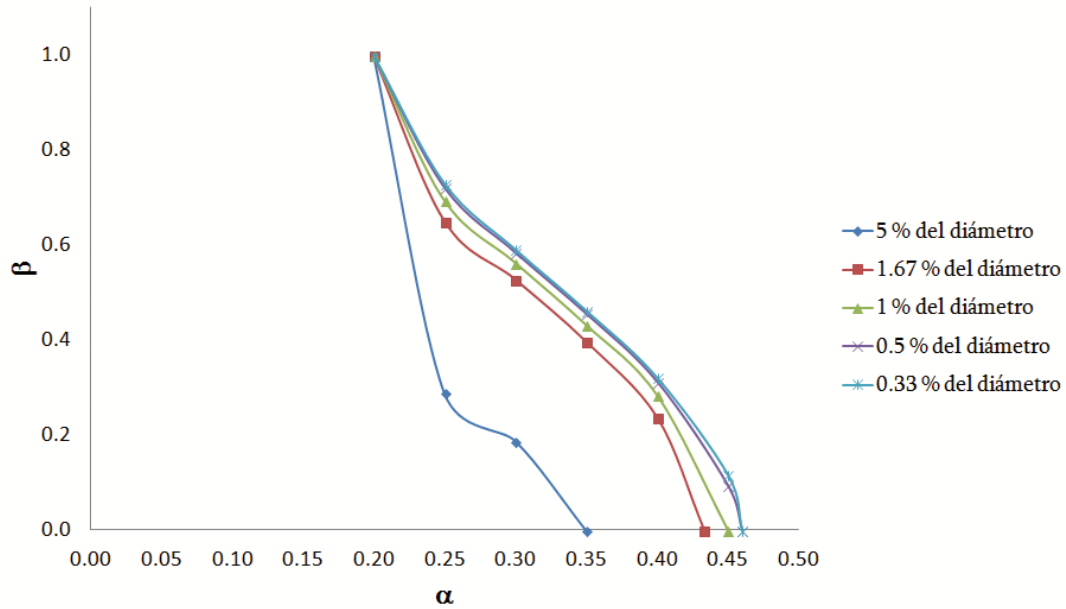


Figura 5.7: Estudio de sensibilidad de $\Delta a(A)$ ($\alpha_o = 0.2$ $\beta_o = 1$)

5.3 Resultados

En este apartado se muestran los resultados obtenidos mediante la utilización del algoritmo de propagación propuesto.

5.3.1 Número de ciclos

Con el modelo propuesto y el algoritmo desarrollado en esta Tesis se ha obtenido el número de ciclos necesarios para que se produzca la propagación de una fisura hasta una profundidad fijada, mediante la integración de la Ley de Paris, según las expresiones 5.8 y 5.9. Resultados de interés para aplicaciones prácticas de mantenimiento de maquinaria rotatoria.

En la figura 5.8 se muestra el número de ciclos necesarios para la propagación de una fisura de profundidad inicial $\alpha_o = 0.05$. Se puede observar que el número de ciclos para la propagación de una fisuras con una misma profundidad inicial aumenta a medida que se incrementa el factor de forma β_o . Para geometrías de frente circular, el número de ciclos es aproximadamente el doble que para geometrías de frente recto. Por lo tanto, cuanto más elíptica es una fisura más lento es el crecimiento. En cuanto a la velocidad de propagación, cuando la fisura es pequeña la velocidad es mayor cuanto más recto es el frente, para fisuras mayores la velocidad de crecimiento es independiente de la forma inicial que presente el frente.

5.3.2 Evolución del frente de fisura

En las figuras 5.9 a 5.13 se muestran pasos intermedios de la evolución de la forma del frente para un mismo tamaño inicial de fisura $\alpha_o = 0,05$ y diferentes formas iniciales de frente β_o . Se observa cómo, independientemente de la forma

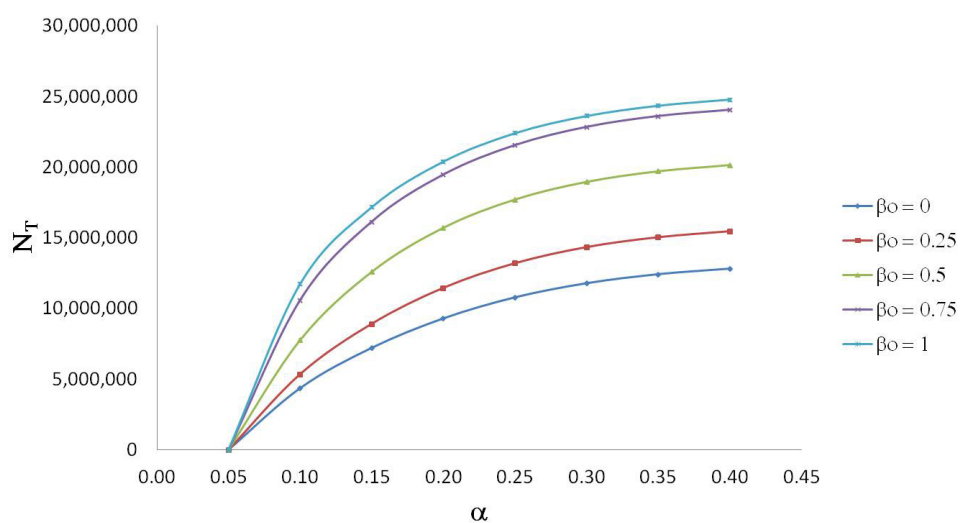


Figura 5.8: Número de ciclos para la propagación de una fisura $\alpha_0 = 0,05$ y diferentes β_0

inicial de la fisura, en este caso el frente de la misma tiene tendencia a convertirse en recto.

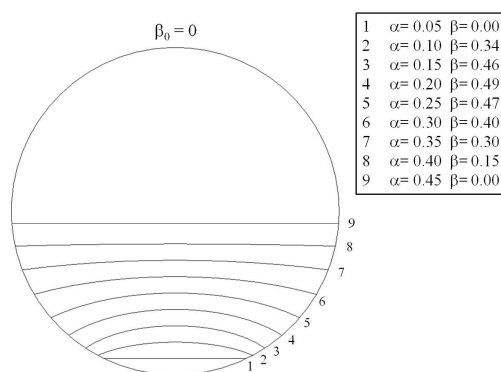


Figura 5.9: Evolución del frente de fisura para una geometría inicial de $\alpha_o = 0.05$ y $\beta_o = 0$

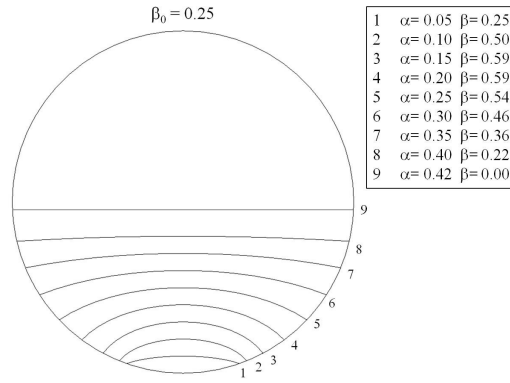


Figura 5.10: Evolución del frente de fisura para una geometría inicial de $\alpha_o = 0.05$ y $\beta_o = 0.25$

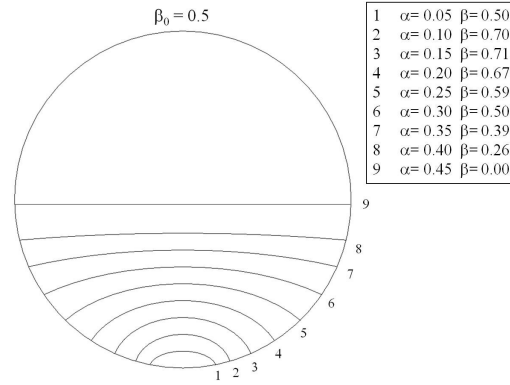


Figura 5.11: Evolución del frente de fisura para una geometría inicial de $\alpha_o = 0.05$ y $\beta_o = 0.5$

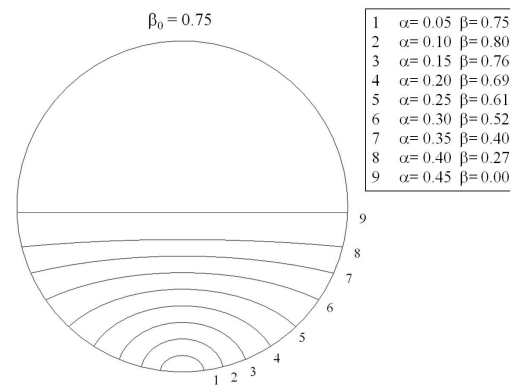


Figura 5.12: Evolución del frente de fisura para una geometría inicial de $\alpha_o = 0.05$ y $\beta_o = 0.75$

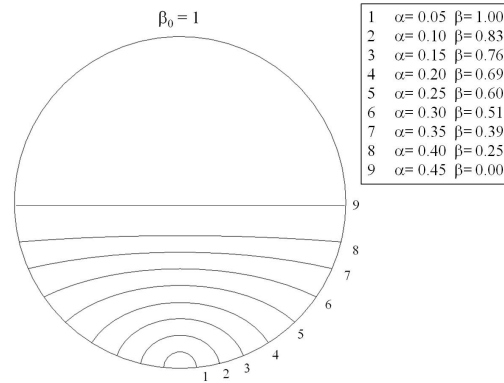


Figura 5.13: Evolución del frente de fisura para una geometría inicial de $\alpha_o = 0.05$ y $\beta_o = 1$

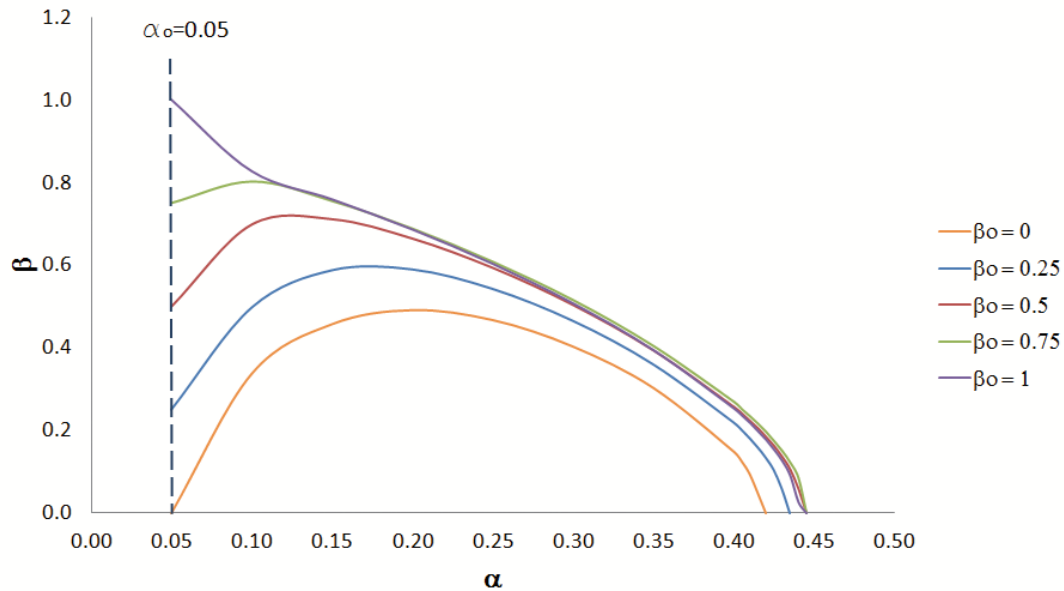


Figura 5.14: Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.05$ y distintos factores de forma iniciales β_o

Los resultados de la evolución del frente mostrados anteriormente se pueden resumir en la figura 5.14. Las figuras 5.15 a 5.22 muestran resultados análogos para profundidades de fisura iniciales mayores.

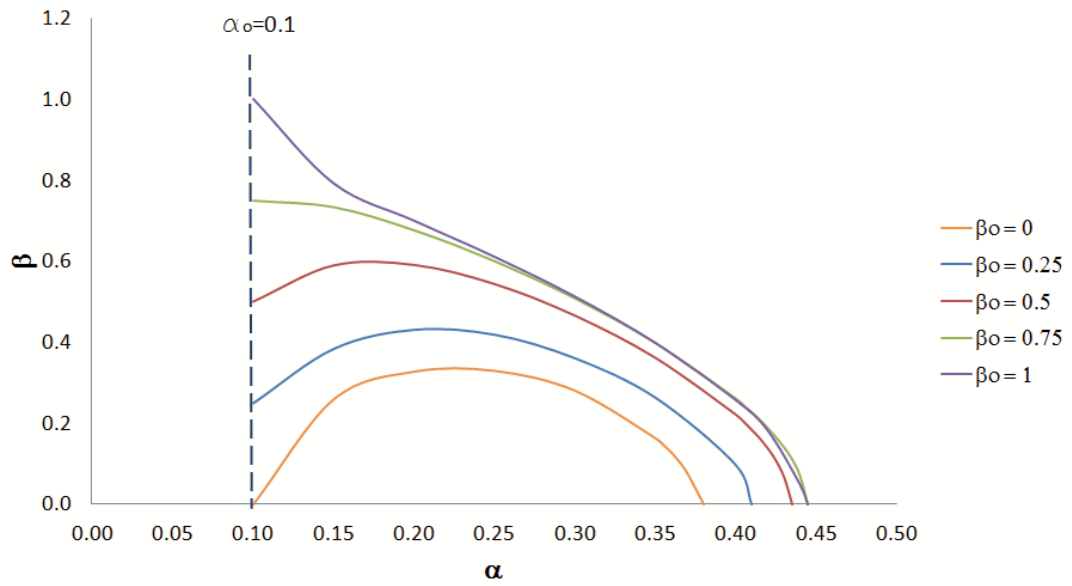


Figura 5.15: Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_0 = 0.1$ y distintos factores de forma iniciales β_0

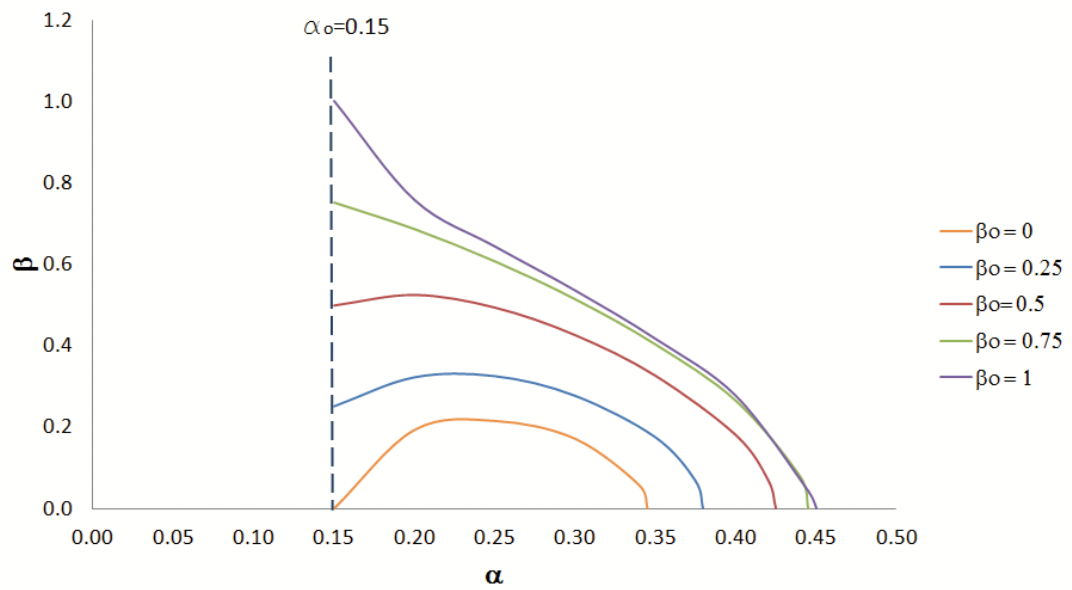


Figura 5.16: Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_0 = 0.15$ y distintos factores de forma iniciales β_0

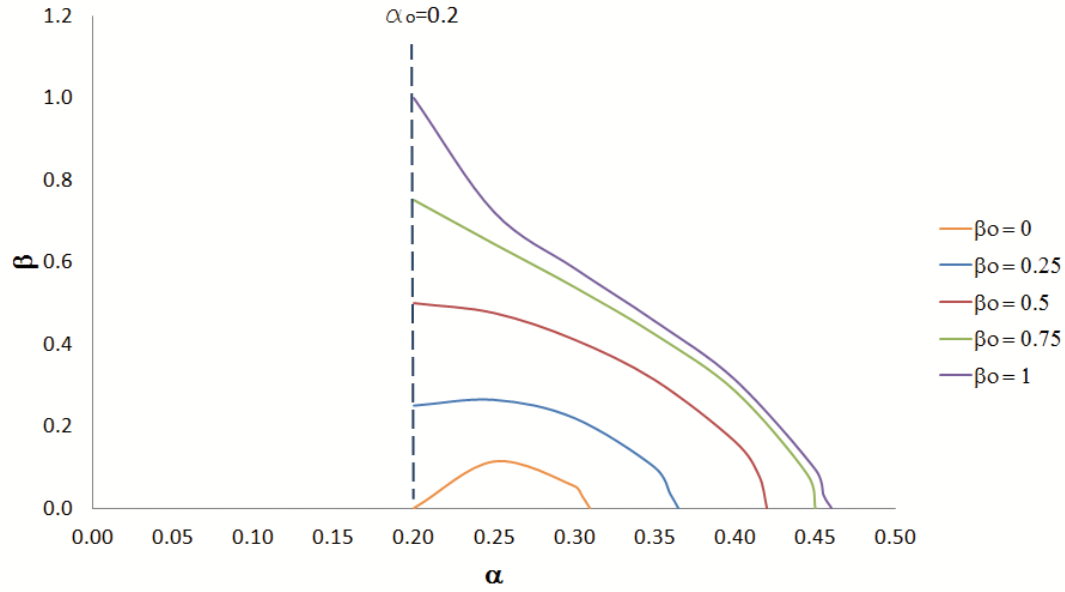


Figura 5.17: Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.2$ y distintos factores de forma iniciales β_o

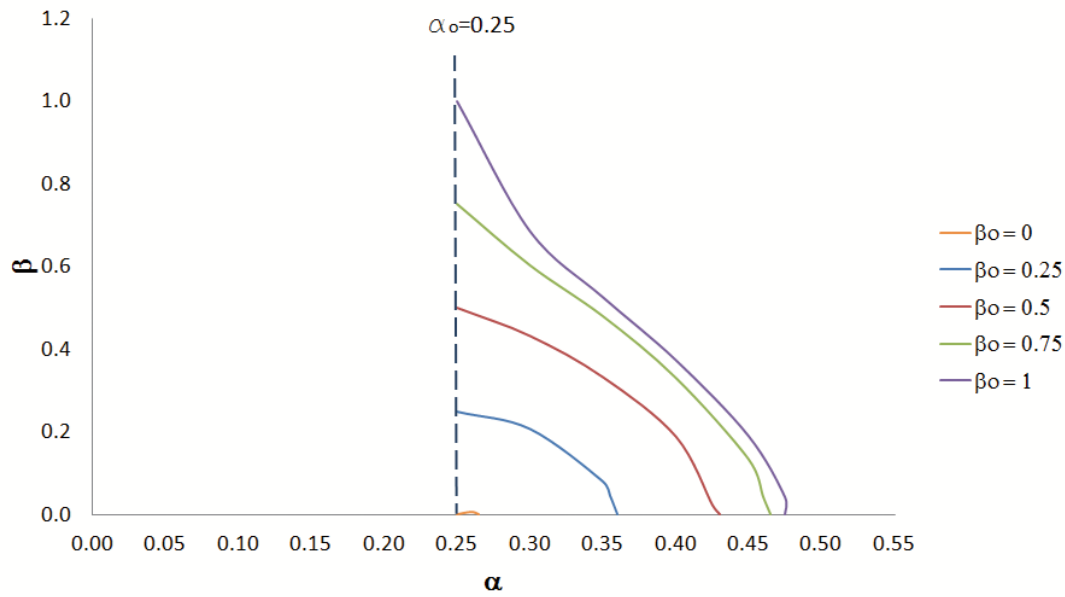


Figura 5.18: Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.25$ y distintos factores de forma iniciales β_o

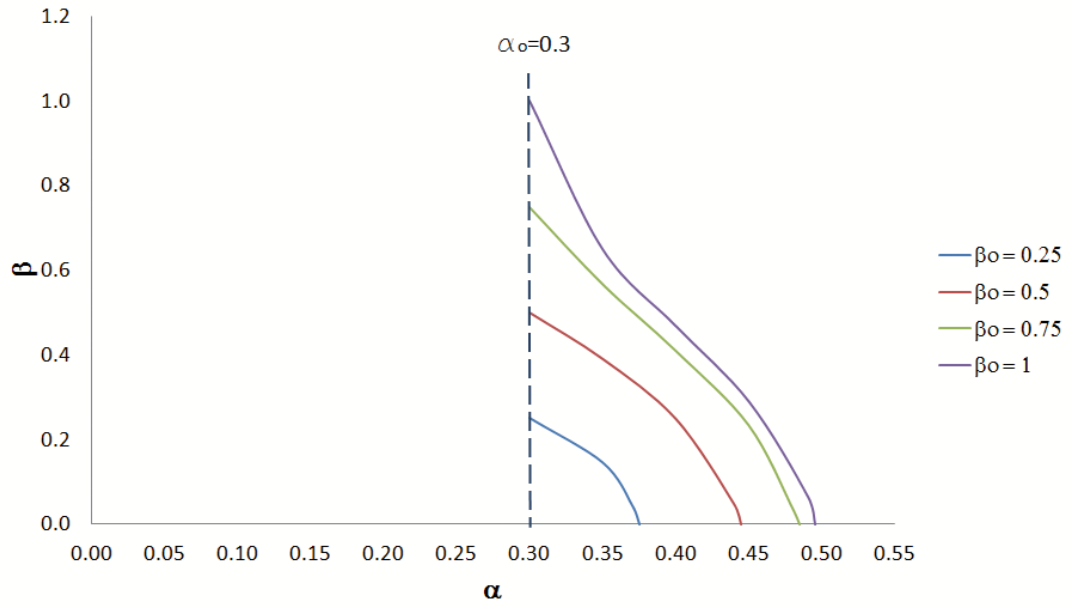


Figura 5.19: Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.3$ y distintos factores de forma iniciales β_o

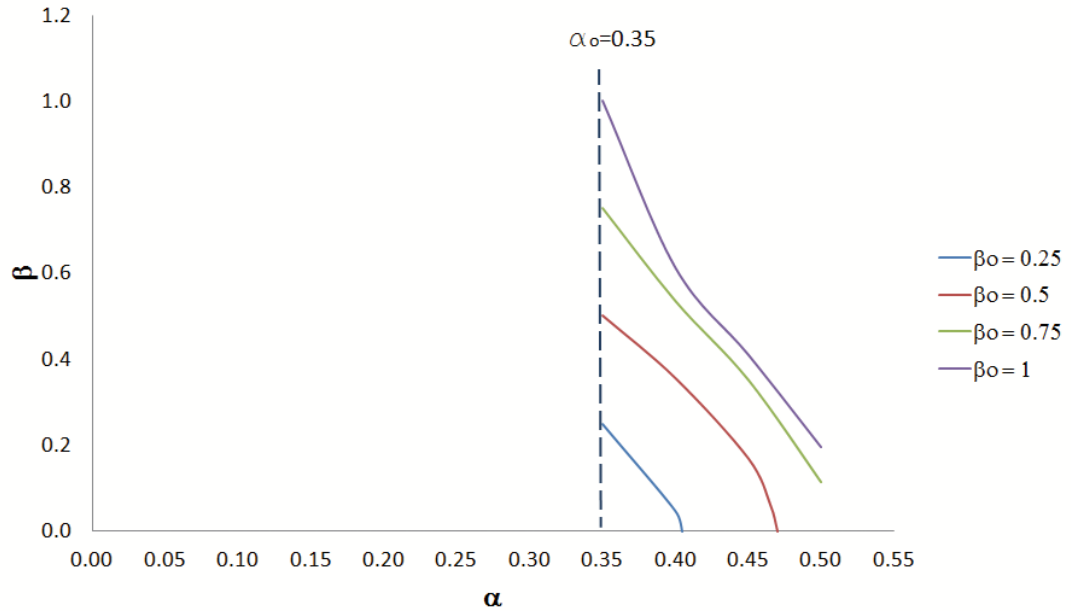


Figura 5.20: Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.35$ y distintos factores de forma iniciales β_o

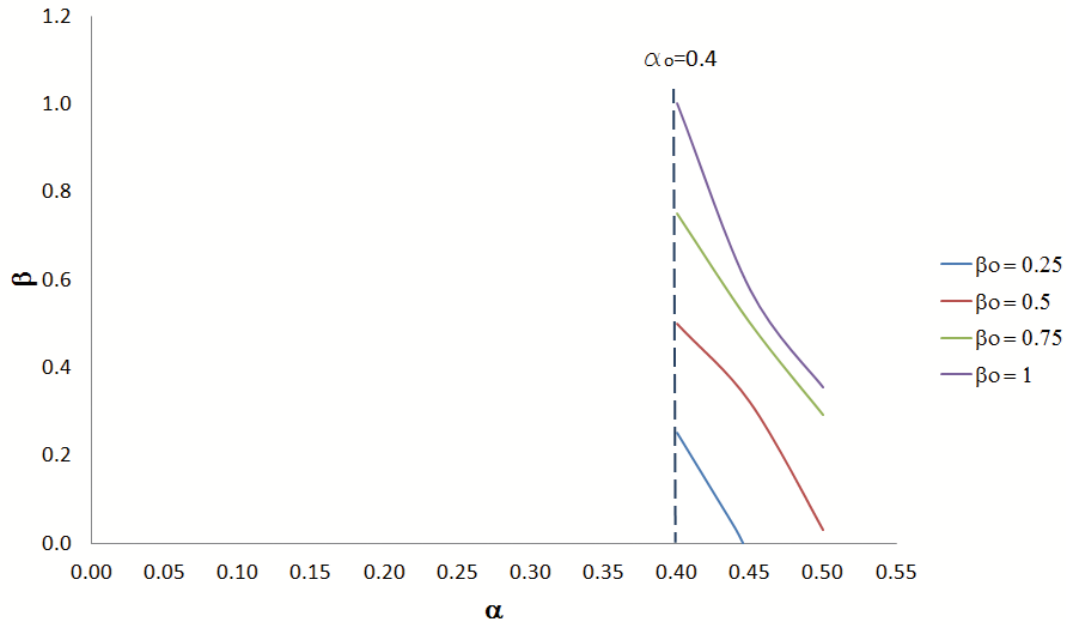


Figura 5.21: Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.4$ y distintos factores de forma iniciales β_o

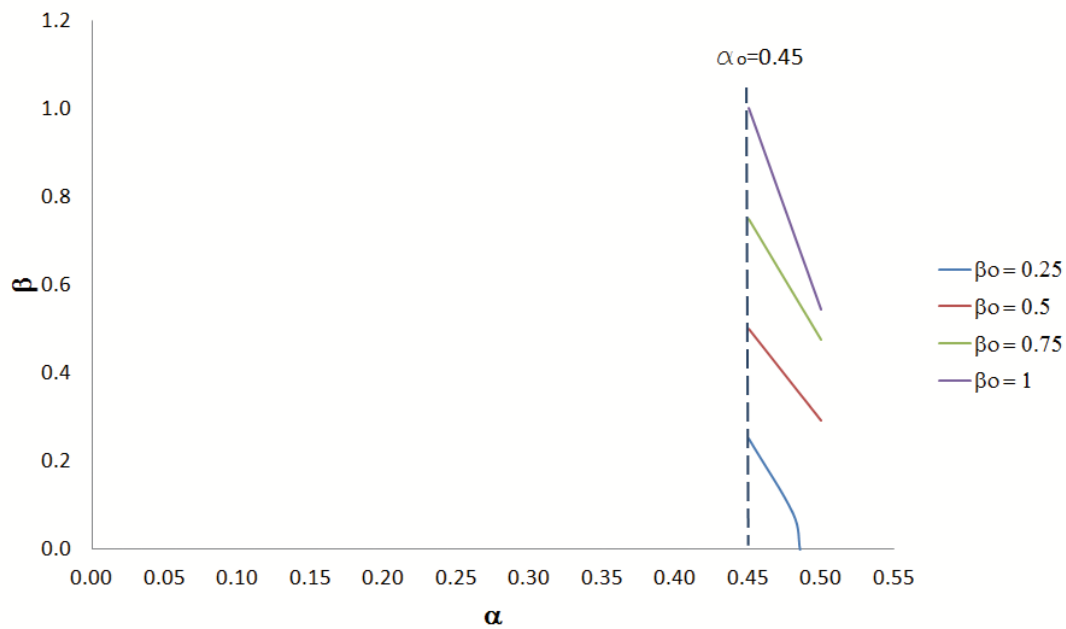


Figura 5.22: Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para una profundidad inicial de $\alpha_o = 0.45$ y distintos factores de forma iniciales β_o

Los resultados muestran que el avance de las distintas fisuras obtenidas tiende a converger hacia una única curva o lo que es lo mismo, las fisuras tienden a adoptar el mismo frente. Este efecto se observa con mayor claridad cuanto menor es la profundidad de la fisura inicial. Si la fisura es inicialmente recta ($\beta_o = 0$) y la profundidad inicial (α_o) es menor a 0.3, tiende a hacerse más elíptica con el crecimiento hasta cierto valor de la profundidad, para recuperar después la forma recta. Por el contrario, si inicialmente el frente de la fisura es circular ($\beta_o = 1$) el factor de forma disminuye hasta que alcanza el valor de cero, es decir, la fisura tiende a hacerse recta con el crecimiento. De igual manera, se puede observar que, independientemente de la forma inicial, llega un momento en el que la fisura se hace recta ya que el factor de forma en cualquier caso tiende a alcanzar el valor de cero.

En la figura 5.23 se muestra el crecimiento de la fisura para un factor de forma inicial $\beta_o = 0.5$ y todas las profundidades iniciales de fisura α_o . Se observa que si la profundidad inicial es menor a 0.2, las fisuras tienden a hacerse más elípticas con el crecimiento hasta un determinado valor de la profundidad y luego recuperan la forma recta. Si la profundidad inicial es mayor a 0.2, el frente de la fisura directamente tiende a hacerse recto con la propagación.

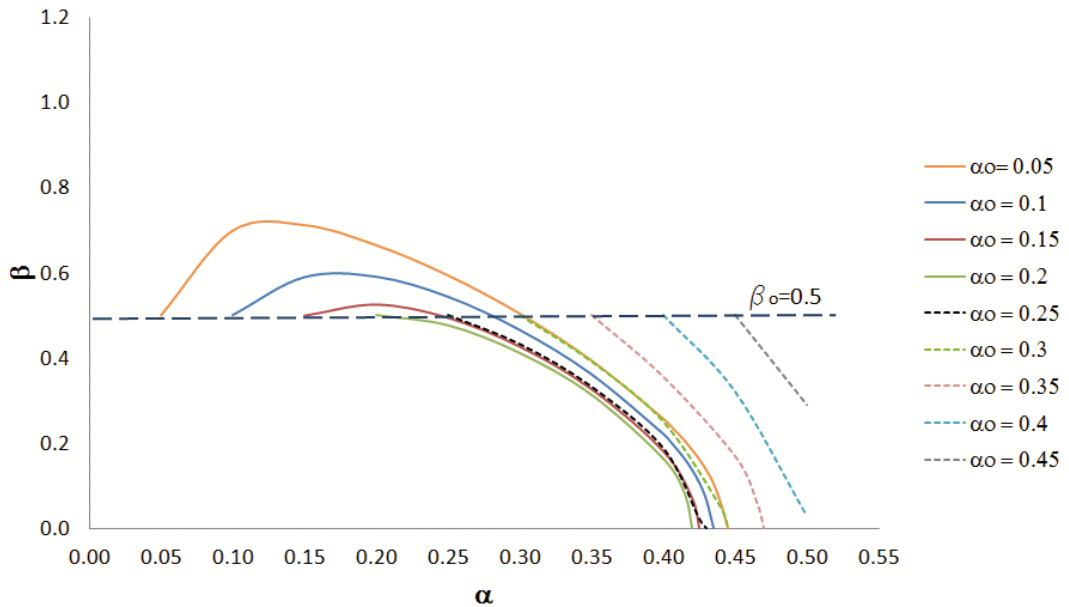


Figura 5.23: Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α , para un forma inicial $\beta_o = 0.5$ y distintas profundidades iniciales de fisura α_o

Para comprobar la validez del modelo de propagación de la fisura propuesto, se muestran los resultados obtenidos por Carpinteri et al.[6] (figura 5.24). En ese trabajo se modeliza la evolución del frente de fisura semielíptico en ejes, bajo sollicitación de flexión rotatoria.

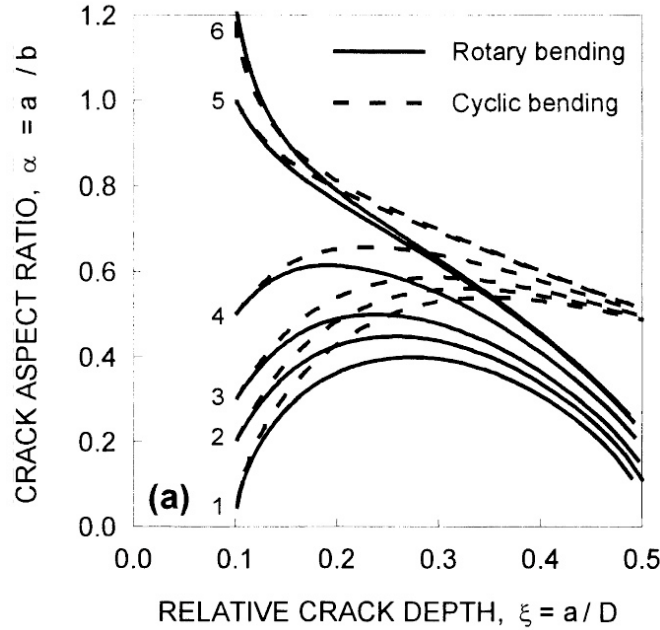


Figura 5.24: Evolución del factor de forma de la fisura β y la profundidad α de [6], para distintas profundidades iniciales α_o y distintos factores de forma β_o para el caso de flexión rotatoria

La comparación de la figura 5.24 con la figura 5.15 muestra una evolución similar. La fisura crece hacia formas de frente más elípticas para luego volver a adquirir frentes más rectos. Al igual que en el modelo propuesto en esta Tesis, las distintas fisuras tienden a adoptar la misma forma de frente. La diferencia está en el valor último del parámetro β . Como ejemplo, para este caso concreto, el presente modelo predice un valor final de $\beta = 0$, mientras que ellos alcanzan valores de β entre 0.1 y 0.3. Esto es debido, por una parte, a las diferencias que existen entre ambos modelos para el cálculo del FIT (apartado 3.5.2) y, por otra, a que Carpinteri considera que, a lo largo de una rotación, el FIT máximo se alcanza, en todos los puntos del frente, en la posición de fisura completamente abierta, sin embargo, durante el desarrollo de esta Tesis se ha mostrado que esto no es cierto en todos los casos (apartado 3.6.2), como puede verse en la figura 3.30.

Teniendo en cuenta los resultados mostrados en las gráficas anteriores, se puede concluir que las fisuras crecen incrementando β (haciéndose más elípticas) siempre que el FIT sea mayor en el centro de la fisura que en los extremos (ver figura 5.25). En el momento en el que el FIT se hace mayor en los extremos que en el centro, la fisura crece disminuyendo β (haciéndose más recta), hasta que $\beta = 0$, instante en el que la fisura se ha convertido en recta, a partir de entonces no es posible analizar la propagación de la fisura con el modelo desarrollado en esta Tesis porque la forma elíptica se invierte (adquiere forma cóncava) debido a que el FIT en los extremos sigue siendo mayor que en el centro (ver figura 5.26).

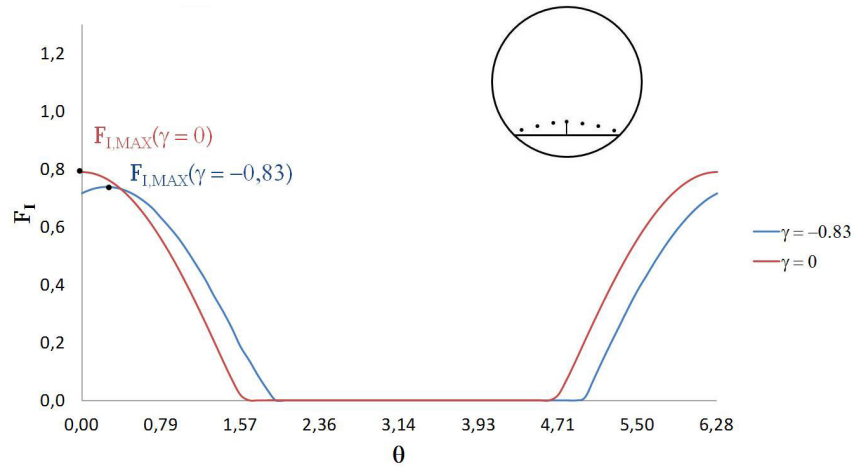


Figura 5.25: FIT máximo en el centro y en los extremos de la fisura para $\alpha = 0.1$

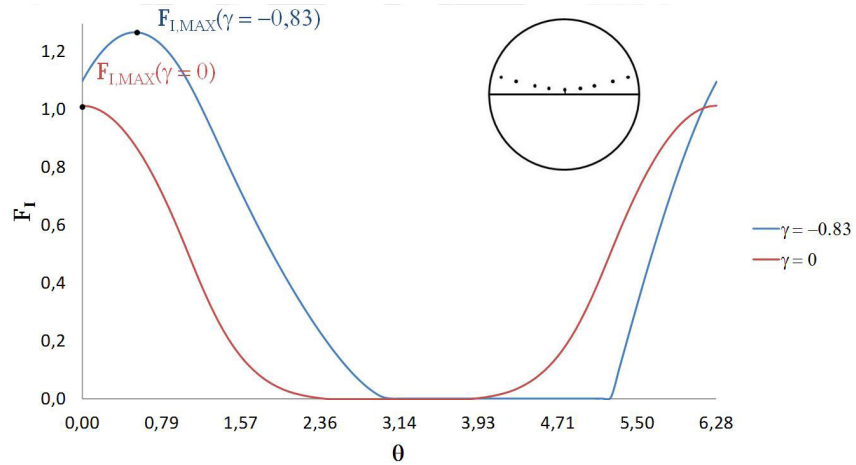


Figura 5.26: FIT máximo en el centro y en los extremos de la fisura para $\alpha = 0.5$

Aunque la mayor parte de los estudios numéricos y experimentales consideran que la forma que adquieren las fisuras durante su propagación es convexa [93, 39, 62, 40, 9, 11, 65, 41], como se muestra en la figura 5.27, en la literatura también se pueden encontrar algunos trabajos relacionados con este tipo de fisuras que presentan forma cóncava [12, 94, 95, 13]. En la figura 5.28 se puede observar la evolución experimental de una fisura de forma inicialmente recta a cóncava, mientras que en la figura 5.29 se muestra otro caso experimental en el que una fisura inicialmente convexa se convierte en cóncava.



Figura 5.27: Evolución experimental de una fisura de frente elíptico en un caso de flexión cíclica [11]

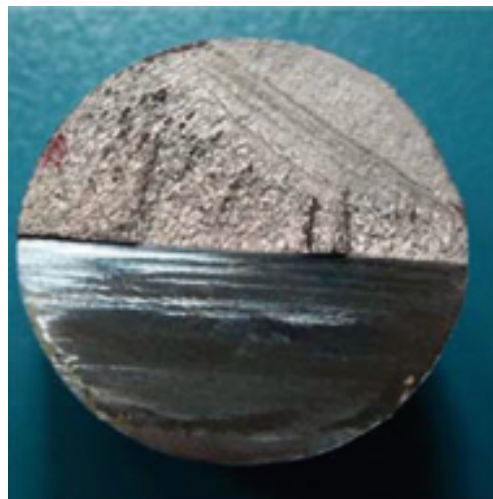


Figura 5.28: Propagación experimental de una fisura con cambio de forma recta a cóncava [12]

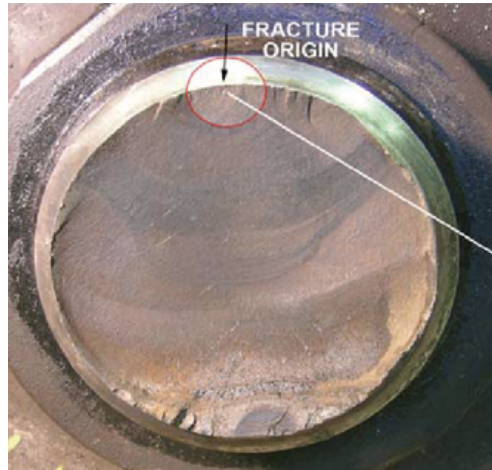


Figura 5.29: Propagación experimental de una fisura con cambio de forma convexa a cóncava [13]

En la tabla 5.1 se muestra la profundidad relativa en la que la fisura empieza a adquirir forma cóncava para cada una de las geometrías iniciales estudiadas. Como puede observarse, la fisura adquiere antes forma cóncava cuanto más recto es el frente inicial.

Tabla 5.1: Profundidad relativa en la que la fisura se hace recta y empieza a adquirir forma cóncava en función de la geometría inicial de la misma

	$\beta_0 = 0$	$\beta_0 = 0,25$	$\beta_0 = 0,5$	$\beta_0 = 0,75$	$\beta_0 = 1$
$\alpha_0 = 0,05$	0,42	0,44	0,45	0,45	0,45
$\alpha_0 = 0,1$	0,38	0,41	0,435	0,445	0,445
$\alpha_0 = 0,15$	0,345	0,38	0,425	0,445	0,45
$\alpha_0 = 0,2$	0,31	0,36	0,42	0,45	0,46
$\alpha_0 = 0,25$	0,27	0,36	0,43	0,465	0,475
$\alpha_0 = 0,3$	—	0,375	0,445	0,485	0,495
$\alpha_0 = 0,35$	—	0,405	0,47	—	—
$\alpha_0 = 0,4$	—	0,45	—	—	—
$\alpha_0 = 0,45$	—	0,485	—	—	—

6

Conclusiones y trabajos futuros

En este capítulo final se exponen las principales conclusiones obtenidas como resultado del trabajo de investigación realizado y las posibles líneas de trabajo futuro.

6.1 Resumen final y conclusiones

Como aspectos más relevantes de la presente Tesis Doctoral cabe citar los siguientes:

- Se ha estudiado sistemática y pormenorizadamente el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) a lo largo del frente de una fisura elíptica contenida en un eje giratorio, teniendo en cuenta el fenómeno de apertura y cierre. Para ello, se ha desarrollado un modelo numérico, mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) utilizando el código comercial ABAQUS, que permite analizar la variación del FIT en el frente en condiciones de flexión rotatoria. En el estudio se han considerado diferentes geometrías de fisura, forma y tamaño, y la rotación del eje se ha simulado mediante el estudio cuasiestático de diferentes posiciones de giro. En conocimiento de la autora, no se ha llevado a cabo anteriormente un estudio tan detallado del comportamiento de un eje fisurado teniendo en cuenta todos los parámetros citados.
- La evaluación numérica del FIT se ha realizado mediante el módulo de fractura, alcanzándose, en el caso de fisura abierta, resultados análogos a los que se obtienen mediante métodos tradicionales de Mecánica de la Fractura (CTOD), también calculados en el desarrollo de esta Tesis. Sin embargo, en el caso de fisura cerrada, en el que el FIT tiene que ser cero, los resultados proporcionados por el módulo de fractura son menores de cero. A partir de esta comprobación y de la comparación con resultados de la literatura se puede concluir que el módulo de fractura sólo ofrece resultados adecuados en el caso de fisura abierta, situación en la que el módulo no hace uso de la definición de los contactos entre las caras de la fisura.
- Se ha propuesto por primera vez un modelo analítico que permite obtener el valor del FIT en un giro completo, en función de las características de la fisura, profundidad y forma, y de la posición relativa en el frente, lo que supone una de sus aportaciones originales. El modelo propuesto se ha obtenido mediante varios ajustes por mínimos cuadrados de los resultados del modelo numérico.

- Se ha analizado la propagación de una fisura semielíptica contenida en un eje giratorio. Para ello, se ha adaptado un algoritmo de integración de la Ley de Paris, utilizando el modelo analítico propuesto, que permite reconstruir el nuevo frente de la fisura tras el crecimiento producido en cada giro. Los frentes obtenidos durante la propagación permiten concluir que, independientemente de la forma inicial del frente, este se convierte gradualmente en recto. Los crecimientos posteriores conducen a un cambio en la forma del frente, de convexo a cóncavo, debido a que se producen avances de mayor magnitud en los extremos que en el centro.

6.2 Trabajos futuros

A partir de los resultados obtenidos en el presente trabajo de investigación se plantean las siguientes líneas de trabajo futuro:

- Realizar un estudio experimental sobre el comportamiento de ejes giratorios fisurados y sobre la propagación de fisuras por fatiga, midiendo el crecimiento de la fisura mediante microscopía óptica.
- Analizar la propagación por fatiga de una fisura superficial semielíptica de forma cóncava contenida en un eje giratorio.
- Estudiar la evolución del frente de una fisura durante su propagación cuando se sitúa una masa excéntrica en distintas posiciones angulares respecto de la fisura.
- Desarrollar un modelo que relacione el FIT con la rigidez local en la zona fisurada y con las órbitas descritas por el eje, que permita abordar el problema inverso.
- Realizar un estudio análogo del FIT en condiciones dinámicas.

Bibliografía

- [1] R. Gasch, A survey of the dynamic behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack, *Journal of Sound and Vibration* 160 (1993) 313–332.
- [2] I. Mayes, W. Davies, Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reability in Design* 106 (1984) 139–145.
- [3] A. Darpe, K. Gupta, A. Chawla, Transient response and breathing behaviour of a cracked jeffcott rotor, *Journal of Sound and Vibration* 272 (2004) 207–243.
- [4] N. Bachschmid, P. Pennacchi, E. Tanzi, Some remarks on breathing mechanism, on non-linear effects and on slant and helicoidal cracks, *Mechanical Systems and Signal Processing* 22 (2008) 879–904.
- [5] Z. Kulesza, J. Sawicki, New finite element modeling approach of a propagating shaft crack, *Journal of Applied Mechanics* 80 (2013) 0210251–02102517.
- [6] A. Carpinteri, Surface flaws in cylindrical shafts under rotary bending, *Fatigue Fracture of Engineering Materials* 21 (1998) 1027–1035.
- [7] A. Carpinteri, Shape change of surface cracks in round bars under cyclic axial loading, *International Journal of Fatigue* 15 (1993) 21–26.
- [8] J. Toribio, J. Matos, B. Gonzalez, J. Escuadra, Numerical modelling of crack shape evolution for surface flaws in round bars under tensile loading, *Engineering Failure Analysis* 16 (2009) 618–630.

- [9] C. Shin, C. Cai, Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending, *International Journal of fracture* 129 (2004) 239–264.
- [10] A. Darpe, K. Gupta, A. Chawla, Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor, *Journal of Sound and Vibration* 269 (2004) 33–60.
- [11] C. Cai, C. Shin, A normalized area-compliance method for monitoring surface crack development in a cylindrical rod, *International Journal of Fatigue* 27 (2005) 801–809.
- [12] L. Rubio, L. Montero, B. Muñoz-Abella, P. Rubio, Efecto de la presencia y orientación de una masa excéntrica en la forma del frente de una fisura de un eje rotatorio, *Anales de Ingeniería Mecánica* 19 (2012).
- [13] Railway investigation report r10t0035, Transportation Safety Board of Canada(2010).
- [14] A. Griffith, The phenomena of rupture and flow in solids, *Philosophical Transactions, Series A* 221 (1920) 163–198.
- [15] G. Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics, ASME* 24 (1957) 361–364.
- [16] T. Anderson, *Fracture mechanics. fundamentals and applications*, in: CRC Press, Boca Raton, 2 ed., 1995.
- [17] L. Freund, Energy flux into the tip of an extending crack in a elastic solid, *Journal of Elasticity* 2 (1972) 341–349.
- [18] F. Nilsson, A note on the stress singularity at non-uniformly moving crack tip, *Journal of Elasticity* 4 (1974) 293–299.
- [19] T. Nishioka, M. Perl, S. Alturi, An analysis of fracture in an impact test specimen, *Journal of Pressure Vessel Technology* 105 (1983) 124–131.
- [20] H. Tada, G. Irwin, P. Paris, *The stress analysis of cracks handbook*, in: Paris Productions Incorporated, St. Louis, 21 ed., 1985.

- [21] J. Rice, A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968) 379–386.
- [22] E. 399, Standad test method for plain-strain fracture toughness of metallic materials, *Annual Book of ASTM Standards* (1994).
- [23] W. Rankine, On the centrifugal force of rotating shaft, *The Engineer* 27 (1869) 249.
- [24] S. Dunkerley, On the whirling and vibrations of shafts, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A* 185 (1984) 279–360.
- [25] A. Foppl, Das problem der lavalschen turbinenwelle, *Der Civillingenieur* 4 (1985) 335–342.
- [26] H. Jeffcott, The lateral vibration of loaded shafts in neighbourhood of a whirling speed: the effect of want of balance, *Philosophical Magazine, Ser. 6* 37 (1919) 304–314.
- [27] R. Gasch, Dynamic behavior of a simple rotor with a cross-sectional crack, *Vibrations in rotating machinery*, ImechE Conference paper (1976).
- [28] A. Dimarogonas, C. Papadopoulos, Vibrations of cracked shafts in bending, *Journal of Sound and Vibration* 91 (1983) 583–593.
- [29] C. Papadopoulos, The strain energy release approach for modeling cracks in rotors: A state of the art review, *Mechanical Systems and Signal Processing* 22 (2008) 763–789.
- [30] T. Patel, A. Darpe, Influence of crack breathing model on nonlinear dynamics of a cracked rotor, *Journal of Sound and Vibration* 311 (2008) 953–972.
- [31] C. Papadopoulos, A. Dimarogonas, Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack, *Journal of Sound and Vibration* 117 (1987) 81–93.
- [32] C. Papadopoulos, A. Dimarogonas, Coupled longitudinal and bending vibrations of a cracked shaft, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design* 110 (1988) 1–8.

- [33] C. Papadopoulos, A. Dimarogonas, Coupled vibrations of cracked shafts, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design* 114 (1992) 461–467.
- [34] H. Keiner, M. Gadala, Comparison of different modeling techniques to simulate the vibration of cracked rotor, *Journal of Sound and Vibration* 254 (2002) 1012–1024.
- [35] J. Wauer, On the dynamics of cracked rotors: a literature survey, *Applied Mechanical Reviews* 43 (1990) 13–17.
- [36] A. Dimarogonas, Vibration of cracked structures: a state of the art review, *Engineering Fracture Mechanics* 55 (1996) 831–857.
- [37] G. Sabnavis, R. Kirik, M. Kasarda, D. Quinn, Cracked shaft detection and diagnostics: A literature review, *The Shock and Vibration Digest* 36 (2004) 287–296.
- [38] L. Cheng, N. Li, X. Chen, Z. Hea, The influence of crack breathing and imbalance orientation angle on the characteristics of the critical speed of a cracked rotor, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 2031–2048.
- [39] A. Carpinteri, R. Brighenti, Part-through cracks in round bars under cyclic combined axial and bending loading, *International Journal of Fatigue* 18 (1996) 33–39.
- [40] M. Fonte, M. Freitas, Stress intensity factors for semi-elliptical surface cracks in round bars under bending and torsion, *International Journal of Fatigue* 21 (1999) 457–463.
- [41] A. Ismail, A. Ariffin, S. Abdullah, M. Ghazali, Stress intensity factors for surface cracks in round bar under single and combined loadings, *Meccanica* 47 (2012) 1141–1156.
- [42] M. Astiz, An incompatible singular elastic element for two- and three-dimensional crack problems, *International Journal of Fracture* 31 (1986) 105–124.
- [43] A. Carpinteri, Elliptical-arc surface cracks in round bars, *Fatigue Fracture of Engineering Materials* 15 (1992) 1141–1153.

- [44] Y. Shih, J. Chen, The stress intensity factor study of an elliptical cracked shaft, *Nuclear Engineering and design* 214 (2002) 137–145.
- [45] L. Rubio, B. Muñoz-Abella, G. Loaiza, Static behaviour of a shaft with an elliptical crack, *Mechanical System and Signal Processing* 25 (2010) 1674–1686.
- [46] T. Zhou, Z. Sun, J. Xu, W. Han, Experimental analysis of a cracked rotor, *J. Dyn. Sys. Meas. Control* 127 (2005) 313–320.
- [47] R. Gasch, Dynamic behaviour of the laval rotor with a transverse crack, *Mechanical Systems and Signal Processing* 22 (2008) 790–804.
- [48] Y. Pu, J. Chen, J. Zou, P. Zhong, Quasi-periodic vibration of cracked rotor on flexible bearings, *Journal of Sound and Vibration* 251 (2002) 875–890.
- [49] W. Qin, G. Meng, T. Zhang, The swing vibration, transverse oscillation of cracked rotor and the intermittence chaos, *Journal of Sound and Vibration* 259 (2003) 571–583.
- [50] W. Qin, G. Cheng, X. Ren, Grazing bifurcation in the response of cracked jeffcott rotor, *Nonlinear Dynamics* 35 (2004) 147– 157.
- [51] O. Jun, H. Eun, Y. Earmme, C. Lee, Modelling and vibration analysis of a simple rotor with breathing crack, *Journal of Sound and Vibration* 155 (1992) 273–290.
- [52] J. Sinou, A. Lees, The influence of cracks in rotating shafts, *Journal of Sound and Vibration* 285 (2005) 1015–1037.
- [53] M. Al-Shudeifat, E. Butcher, New breathing functions for the transverse breathing crack of the cracked rotorsystem: approach for critical and subcritical harmonic analysis, *Journal of Sound and Vibration* 30 (2011) 526–544.
- [54] R. Liong, C. Proppe, Finite element multibody simulation of a breathing crack in a rotor with a cohesive zone model, *ISRN Mechanical Engineering* 10 (2013) ID 249035.
- [55] W. Blackburn, Calculation of stress intensity factors for straight cracks in grooved and ungrooved shafts, *Engineering Fracture Mechanics* 8 (1976) 731–736.

- [56] A. Carpinteri, Stress intensity factors for straight-fronted edge cracks in round bars, *Engineering Fracture Mechanics* 42 (1992) 1035–1040.
- [57] A. Valiente, Criterios de fractura para alambres, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid (1980).
- [58] A. Bush, Experimentally determined stress-intensity factors for single-edge-crack round bars loaded in bending, *Exp. Mech.* 16 (1976) 249–257.
- [59] F. Ouchterlony, Extension of the compliance and stress intensity formulas for the single edge crack round bar in bending, *Fracture Mechanics for Ceramics, Rocks and Concrete*, ASTM STP 145 (1981) 237–256.
- [60] R. Forman, V. Shivakumar, Growth behavior of surface cracks in the circumferential plane of solid and hollow cylinders, *Fracture Mechanics: Seventeen Volume*. ASTM 905 (1986) 59–74.
- [61] I. Raju, J. Newman, Stress intensity factors for circumferential surface cracks in pipes and rods, *Fracture Mechanics: Seventeenth Volume*, ASTM STP 905 17 (1986) 789–805.
- [62] N. Couroneau, J. Royer, Simplified model for the fatigue growth analysis of surface cracks in round bars under mode I, *International Journal of Fatigue* 20 (1998) 711–718.
- [63] A. Shahani, S. Habibi, Stress intensity factors in a hollow cylinder containing a circumferential semi-elliptical crack subjected to combined loading, *International Journal of Fatigue* 29 (2007) 128–140.
- [64] Z. H. Zhou, X. S. Xu, A. Y. T. Leung, The mode III stress electric intensity factors and singularities analysis for edge-cracked circular piezoelectric shafts, *International Journal of Solids and Structures* 46 (2009) 3577–3586.
- [65] S. Khooand, K. Saravanan, Stress intensity factor for cracks emanating from a shaft, *Journal of Applied Sciences* 11 (2011) 1839–1844.
- [66] A. Levan, J. Royer, Part-circular surface cracks in round bars under tension, bending and twisting, *International Journal of Fracture* 61 (1993) 71–99.

- [67] T. Lorentzen, N. Kjaer, T. Henriksen, The application of fracture mechanics to surface cracks in shafts, *Engineering Fracture Mechanics* 23 (1986) 1005–1014.
- [68] Y. Shih, J. Chen, Analysis of fatigue crack growth on a cracked shaft, *International Journal of fracture* 19 (1997) 477–485.
- [69] R. Johnson, Fracture of a cracked solid circular cylinder, Ph.D. Dissertation, Engineering Mechanics Dept., University of Wisconsin (1972).
- [70] A. Athanassiadis, J. Boissknot, P. Brevet, D. Francois, A. Raharinaivo, Linear elastic fracture mechanics computations of cracked cylindrical tensioned bodies, *International Journal of Fracture* 17 (1981) 553–566.
- [71] T. Mackay, B. Alperin, Stress intensity factors for fatigue cracking in high-strength bolts, *Engineering Fracture Mechanics* 21 (1985) 391–397.
- [72] G. Harkegard, An experimental study of the influence of inclusions on the fatigue properties of steel, *Engineering Fracture Mechanics* 6 (1974) 795–805.
- [73] M. Fonte, M. Freitas, Semi-elliptical fatigue crack growth under rotating or reversed bending combined with steady torsion, *Fat. Fract. Eng. Mat. Struct* 20 (1997) 895–906.
- [74] R. Avilés, Análisis de fatiga en máquinas, in: Ediciones Paraninfo. S.A., 2005.
- [75] P. Paris, F. Erdogan, A critical analysis of crack propagation laws, *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering* 85 (1963) 528–534.
- [76] K. Walker, The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-t3 and 7075-t6 aluminum, In: *effect of Environment and Complex load history for Fatigue life*, ASTM STP 462 (1970) 1–14.
- [77] R. Forman, V. Kearney, R. Engle, Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures, *Journal of Basic Engineering* 89 (1967) 459–464.
- [78] W. Elber, The significance of fatigue crack closure. in: *Damage tolerance in air craft structure*, ASTM STP 486 (1971) 230–242.
- [79] J. Collipriest, An experimentalist's view of the surface flaw problem, *ASME* 43 (1972) 43–613.

- [80] H. Liu, A review of fatigue crack growth analysis, *Journal of Basic Engineering ASME Trans* 83 (1981) 23.
- [81] T. Yokobory, *Physics of strength and plasticity*, MIT Press 327 (1969) 16–24.
- [82] Z. Xiulin, A simple formula for fatigue crack propagation and a new method for the determination of δk_{th} , *Engineering Fracture Mechanics* 27 (1987) 465.
- [83] W. Dover, Fatigue crack growth in offshore structures, *Journal of the Society of Environmental Engineers* (1976) 3–9.
- [84] A. Sullivan, T. Crooker, Analysis of fatigue crack growth in high strength steel, *ASME Trans* 179 (1976).
- [85] X. Lin, R. Smith, Shape growth simulation of surface cracks in tension fatigued round bars, *International Journal of Fatigue* 19 (1997) 461–469.
- [86] X. Lin, R. Smith, Fatigue growth simulation for cracks in notched and unnotched round bars, *International Journal of Mechanical Sciences* 40 (1998) 405–419.
- [87] J. Matos, B. González, J. Escuadra, J. Toribio, Un procedimiento automático de ajuste de una elipse para modelizar el frente de una fisura superficial, *Anales de Mecánica de la Fractura* 22 (2004) 81–86.
- [88] N. Couroneau, J. Royer, Simplifying hypotheses for the fatigue growth analysis of surface cracks in round bars, *Computers and Structures* 77 (2000) 381–389.
- [89] M. Astiz, M. Elices, J. Morton, A. Valiente, A photoelastic determination of stress intensity factors for an edge-cracked rod in tension, *Proceedings of the Society/or Experimental Stress Analysis, Spring Meeting, Dearborn, Michigan* 1 (1981) 277–282.
- [90] Z. Bazant, L. Estenssoro, Surface singularity and crack propagation, *International Journal of Solids and Structures* 15 (1979) 405–426.
- [91] ABAQUS, Abaqus theory manual, version 6.7, in: Dassault Systèmes Inc, 2007.
- [92] A. Darpe, A novel way to detect transverse surface crack in a rotating shaft, *Journal of Sound and Vibration* 305 (2007) 151–171.

- [93] M. Caspers, C. Mattheck, D. Munz, Fatigue crack propagation in cylindrical bars, *Z. Werkstoffech* 17 (1986) 327–333.
- [94] A. Carpinteri, S. Vantadori, Sickle-shaped cracks in metallic round bars under cyclic eccentric axial loading, *International Journal of Fatigue* 31 (2009) 759–765.
- [95] A. Carpinteri, S. Vantadori, Sickle-shaped surface crack in a notched round bar under cyclic tension and bending, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 32 (2009) 223–232.

A

Coeficientes de los ajustes

A continuación se presentan los coeficientes C_{ijk} , M_{ijk} , N_{ijk} y P_{ijk} , utilizados en el Capítulo 4 para el cálculo de los ajustes.

Tabla A.1: Coeficientes C_{ijk} en la ecuación 4.23.

$k = 0$						
i	j	0	1	2	3	4
0		1,1149	−0,1011	−1,2914	1,5380	−0,5755
1		−2,8254	2,4021	4,0797	−9,6620	4,8045
2		11,2497	−13,7023	−6,0261	23,1311	−11,8974
3		−20,2995	32,5431	−4,7277	−27,2719	15,8887
4		19,5399	−28,0342	12,3172	6,2866	−6,0179
$k = 1$						
i	j	0	1	2	3	4
0		−0,0002	0,0015	−0,0047	0,0058	−0,0025
1		0,0030	−0,0289	0,0902	−0,1124	0,0480
2		−0,0176	0,1755	−0,5578	0,7029	−0,3029
3		0,0408	−0,4242	1,3757	−1,7547	0,7623
4		−0,0327	0,3529	−1,1642	1,5001	−0,6561
$k = 2$						
i	j	0	1	2	3	4
0		−0,3411	0,9831	−1,8562	1,4317	−0,1872
1		1,4407	−10,8463	38,9929	−50,5223	21,8856
2		−4,3075	42,5938	−148,9409	207,5330	−97,4021
3		8,5008	−82,2696	267,9685	−372,2081	177,9864
4		−7,5495	65,0074	−195,0925	269,6892	−129,8838
$k = 3$						
i	j	0	1	2	3	4
0		0,0002	−0,0018	0,0054	−0,0066	0,0028
1		−0,0040	0,0349	−0,1055	0,1301	−0,0556
2		0,0227	−0,2150	0,6731	−0,8473	0,3664
3		−0,0518	0,5289	−1,7122	2,1954	−0,9599
4		0,0410	−0,4468	1,4846	−1,9295	0,8506

Tabla A.2: Continuación coeficientes C_{ijk} en la ecuación 4.23.

		$k = 4$				
i	j	0	1	2	3	4
0		-0,4004	-1,2548	8,0348	-10,2068	3,9100
1		2,0504	10,2428	-68,7099	102,9851	-46,7391
2		-7,3010	-31,5711	224,7398	-347,7845	163,0034
3		12,8018	46,0534	-345,1901	543,6977	-259,2019
4		-8,7631	-27,0404	208,0660	-324,5853	154,9086

Tabla A.3: Coeficientes M_{ijk} en la ecuación 4.24.

$k = 0$						
i	j	0	1	2	3	4
0		0,2025	4,2142	−17,3340	19,2942	−6,4176
1		3,1258	−69,8850	225,6352	−212,7257	55,2848
2		−15,2064	370,2246	−1025,7213	751,0962	−87,2312
3		31,0216	−771,7768	1825,6074	−812,4528	−254,1595
4		−19,7978	564,6542	−1144,4553	109,8979	472,7299
$k = 1$						
i	j	0	1	2	3	4
0		−0,4301	2,9225	−4,8864	2,2355	0,1167
1		−0,3868	−53,0150	120,9595	−73,2836	5,1915
2		−3,4911	286,2877	−633,4758	301,5523	44,7703
3		11,3580	−601,8686	1178,9132	−209,3610	−364,8232
4		−11,6459	443,1922	−747,4410	−167,5836	469,8805
$k = 2$						
i	j	0	1	2	3	4
0		−0,1299	1,6403	−2,0696	0,3759	0,1460
1		0,4271	−22,6684	4,9782	67,3707	−49,3010
2		−2,8047	93,4726	218,2392	−879,1110	567,5736
3		6,1327	−133,1351	−1027,8521	3050,2299	−1890,2712
4		−3,8849	53,6772	1144,4950	−3061,9095	1864,9933
$k = 3$						
i	j	0	1	2	3	4
0		0,3478	−5,7537	14,4384	−10,1608	1,2458
1		−2,3462	96,8226	−232,2439	128,0082	8,0454
2		13,8901	−501,7809	1011,2087	−174,9918	−333,3984
3		−31,3488	1016,9545	−1530,5353	−970,2061	1471,2155
4		22,7470	−725,7490	730,0493	1626,7641	−1613,1227

Tabla A.4: Continuación coeficientes M_{ijk} en la ecuación 4.24.

		$k = 4$				
i	j	0	1	2	3	4
0		0,0742	-9,1833	30,8910	-34,2833	12,5928
1		-3,3959	150,7203	-415,0964	348,5337	-82,3299
2		23,4223	-780,3623	1747,5957	-791,7086	-188,3602
3		-51,4366	1579,5357	-2648,3430	-693,7424	1788,6265
4		36,4132	-1118,7866	1269,7469	2089,5660	-2255,5866

Tabla A.5: Coeficientes N_{ij} en la ecuación 4.26.

i	j	0	1	2	3	4
0		1,4835	-5,4105	18,6168	-16,7551	3,7234
1		-5,5996	89,7875	-237,3646	150,4859	0,0001
2		25,8163	-468,8147	990,9583	-224,9522	-310,2814
3		-50,9054	955,0826	-1483,5279	-853,2753	1396,2650
4		36,3610	-678,7389	678,7375	1551,4064	-1551,4051

Tabla A.6: Coeficientes P_{ijk} en la ecuación 4.46.

$k = 0$				
i	j	0	1	2
0		1,3572	0,0744	-0,0047
1		4,4025	-0,7732	-0,3956
2		-17,0621	0,8452	1,5198
3		25,8814	1,3108	-3,7502
$k = 1$				
i	j	0	1	2
0		0,5914	-0,1975	0,0892
1		-17,2991	5,4317	3,6001
2		59,9433	-7,4584	-30,5326
3		-83,9540	-6,7764	46,5455
$k = 2$				
i	j	0	1	2
0		3,8847	-7,6601	7,5993
1		-58,9465	95,0060	-94,7582
2		257,1972	-339,4835	339,7637
3		-324,5624	347,8583	-351,2124
$k = 3$				
i	j	0	1	2
0		-6,6767	10,9969	-11,7223
1		120,2630	-147,0426	122,0319
2		-509,4982	389,3841	-259,7132
3		691,0444	-275,8572	153,5059
$k = 4$				
i	j	0	1	2
0		-13,6202	36,3480	-37,0157
1		195,2715	-427,7930	444,0501
2		-815,7521	1474,4349	-1548,8466
3		982,7682	-1473,2480	1580,1396

Tabla A.7: Continuación coeficientes P_{ijk} en la ecuación 4.46.

$k = 5$				
i	j	0	1	2
0		17,5015	-36,5664	43,7521
1		-330,5012	516,1137	-505,2428
2		1396,8938	-1458,3471	1340,7482
3		-1820,2826	1165,5621	-1108,0198
$k = 6$				
i	j	0	1	2
0		11,8144	-34,5372	35,4444
1		-166,2480	399,9657	-419,4656
2		684,4963	-1358,6905	1444,3507
3		-811,8004	1339,7676	-1457,8622
$k = 7$				
i	j	0	1	2
0		-13,7589	32,2245	-39,8119
1		263,9032	-451,1001	466,4782
2		-1103,8255	1271,9814	-1278,5027
3		1411,0383	-1028,1201	1096,5983